

# Sisältö

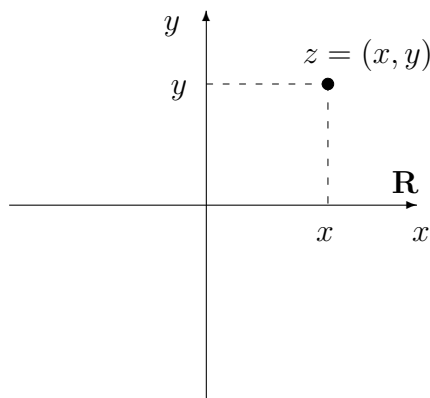
|          |                                                       |          |
|----------|-------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Kompleksiluvut</b>                                 | <b>1</b> |
| 1.1      | Määritelmä . . . . .                                  | 1        |
| 1.2      | Kertolasku suorakulmaisissa koordinaateissa . . . . . | 4        |
| 1.3      | Käänteisluku ja jakolasku. . . . .                    | 9        |
| 1.4      | Esimerkkejä. . . . .                                  | 9        |
| 1.5      | Moivre'n kaava. . . . .                               | 11       |
| 1.6      | Eulerin kaava. . . . .                                | 13       |
| 1.7      | Esimerkkejä. . . . .                                  | 14       |
| 1.8      | Binomiyhtälö . . . . .                                | 16       |

## 1 Kompleksiluvut

### 1.1 Määritelmä

Tarkastellaan euklidista tasoa

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$



Kuva 1: Euklidinen taso  $\mathbb{R}^2$

Suorakulmaisessa koordinaatistossa on *x-akseli* ja *y-akseli*. Luvut  $x$  ja  $y$  ovat pisteen  $z = (x, y)$  *koordinaatteja*. Tavalliseen tapaan  $x$ -akseli voidaan tulkita reaalilukujen joukoksi  $\mathbb{R}$ . Tällöin  $x$ -akselia kutsutaan *reaaliakseliksi* ja sitä voidaan tarvittaessa merkitä symbolilla  $\mathbb{R}$ . Pistettä  $z = (x, 0)$  kutsutaan reaaliluvuksi. Tällöin voidaan merkitä  $z = x \in \mathbb{R}$ .

Algebrallisesti  $\mathbb{R}$  on *kunta*. Reaaliluvuilla on määritelty yhteenlasku ja kertolasku siten, että tavalliset laskukaavat ovat voimassa. Erityisen mielenkiintoisia ovat tulon merkkisäännöt:

| kertojan merkki | kerrottavan merkki | tulon merkki |
|-----------------|--------------------|--------------|
| +               | +                  | +            |
| +               | -                  | -            |
| -               | +                  | -            |
| -               | -                  | +            |

Hämmästyttävää on, että myös negatiivisen luvun neliö on positiivinen. Eräs selitys löydetään laajentamalla  $\mathbb{R}$ :n laskutoimitukset koko tasoon.

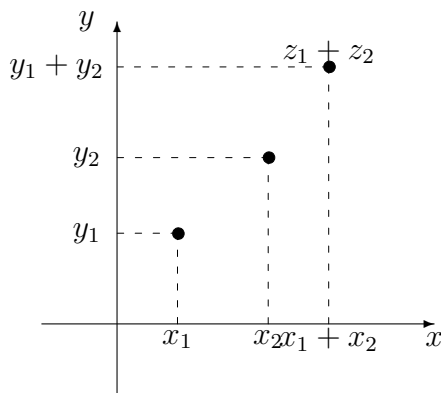
Reaalilukujen yhteenlaskun laajentaminen reaaliakselilta koko tasoon on helppoa. Jos

$$z_1 = (x_1, y_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = (x_2, y_2)$$

ovat kaksi pistettä, niin summaksi

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

kelpaa tavallinen ”vektorisumma”.

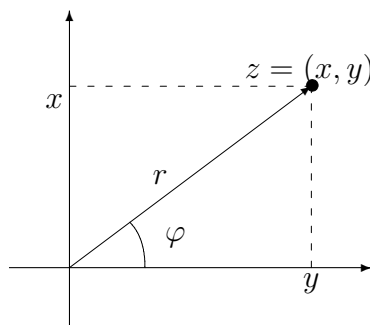


Kuva 2: Kompleksilukujen summa

Jos  $y_1 = y_2 = 0$  eli pisteet ovat reaaliakselilla (ts. ovat reaalilukuja), niin  $z_1 + z_2$  on tavallinen reaalilukujen summa. (Merkitään  $z = x$ , kun  $z = (x, 0)$ .)

Kertolaskun laajentaminen ei ole yhtä helppoa, sillä valmiina ei ole sopivaa ”vektorituloa”. Kertolaskun laajentamista varten esitetään tason pisteet  $z = (x, y) \neq (0, 0)$  napakoordinaattien  $r$  ja  $\varphi$  avulla:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$



Kuva 3: Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys

Merkitään  $z = (r, \varphi)$ . Tulo on nyt määriteltävissä yksinkertaisella kaavalla

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2).$$

Siis: Pisteiden  $z_1$  ja  $z_2$  etäisyydet origosta kerrotaan keskenään sekä vaihekulmat lasketaan yhteen.

Erikoisesti on  $z_1 z_2 = 0$  aina ja vain kun  $z_1 = 0$  tai  $z_2 = 0$ .

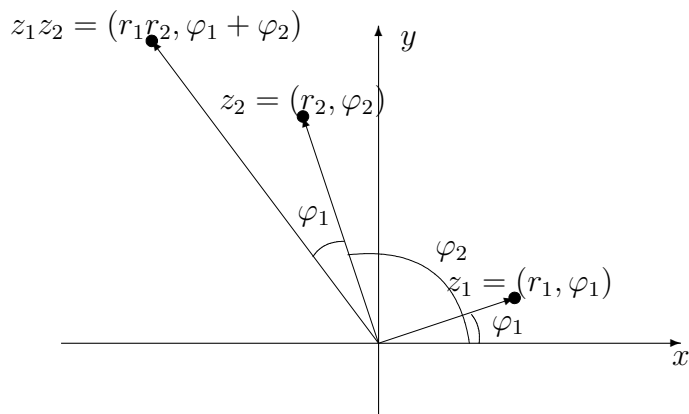
Tarkastellaan reaalilukujen kertolaskua tämän uuden kertolaskun valossa. Olkoon  $z = (r, \varphi)$  reaaliluku. Tällöin aina  $|z| = r$ . Lisäksi

$$\begin{aligned} z = r > 0 &\Leftrightarrow \varphi = 0 + n2\pi \\ z = -r < 0 &\Leftrightarrow \varphi = \pi + n2\pi \end{aligned}$$

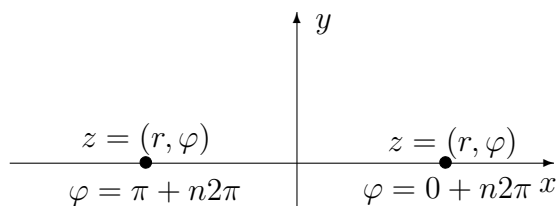
Jos nyt  $z_1 = (r_1, \varphi_1)$  ja  $z_2 = (r_2, \varphi_2)$  ovat kaksi reaalilukua, niin  $z_1 z_2 = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$ , joten

$$\begin{aligned} z_1 z_2 > 0 &\Leftrightarrow \varphi_1 + \varphi_2 = 0 + n2\pi \\ &\Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0 + n2\pi \quad \text{tai} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \pi + n2\pi \\ &\Leftrightarrow z_1 > 0 \quad \text{ja} \quad z_2 > 0 \quad \text{tai} \quad z_1 < 0 \quad \text{ja} \quad z_2 < 0. \end{aligned}$$

Reaalilukujen tulon merkkisäännöt ja uuden kertolaskun määritelmä liittyvät toisiinsa kauniilla tavalla.



Kuva 4: Kompleksilukujen tulo



Kuva 5: Puhtaasti reaaliset kompleksiluvut

## 1.2 Kertolasku suorakulmaisissa koordinaateissa

Muodostetaan kertolaskun lauseke  $xy$ -koordinaateissa. Olkoot

$$z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2).$$

Silloin

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \varphi_1, & y_1 &= r_1 \sin \varphi_1 \\ x_2 &= r_2 \cos \varphi_2, & y_2 &= r_2 \sin \varphi_2 \end{aligned} .$$

Jos merkitään

$$z_1 z_2 = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi),$$

niin  $r = r_1 r_2$  ja  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Siis

$$\begin{aligned}
 x &= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\
 &= r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - r_1 r_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
 &= (r_1 \cos \varphi_1)(r_2 \cos \varphi_2) - (r_1 \sin \varphi_1)(r_2 \sin \varphi_2) \\
 &= x_1 x_2 - y_1 y_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\
 &= r_1 r_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + r_1 r_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
 &= (r_1 \cos \varphi_1)(r_2 \sin \varphi_2) + (r_2 \cos \varphi_2)(r_1 \sin \varphi_1) \\
 &= x_1 y_2 + x_2 y_1.
 \end{aligned}$$

Algebrasta tuttu kaava

$$z_1 z_2 = (x_1 y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

seuraa siis kertolaskun (geometrisesta) määritelmästä. Algebrassa on tästä kaavasta lähtemällä voitu helposti todistaa, että  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  on kunta. Sille käytetään merkintää  $\mathbb{C}$  ja sen alkioita kutsutaan *kompleksiluvuiksi*.

Yhtälöllä

$$z^2 = -1$$

ei ole tulon merkkisääntöjen nojalla ratkaisua reaalityyppisen lukujen kunnassa  $\mathbb{R}$ . Tutkitaan, onko sillä ratkaisua kompleksilukujen kunnassa  $\mathbb{C}$ . Koska  $0^2 = 0$ , riittää tarkastella kompleksilukuja  $z \neq 0$ . Olkoon  $z$ :lla napakoordinaattiesitys

$$z = (r, \varphi).$$

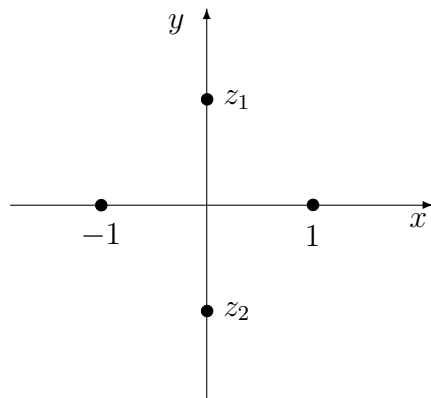
Silloin  $z^2 = (r^2, 2\varphi)$  ja  $-1 = (1, \pi)$ , joten

$$\begin{aligned}
 z^2 = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\varphi = \pi + n2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \pi/2 + n\pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

Yhtälöllä  $z^2 = -1$  on siis kaksi ratkaisua

$$\begin{cases} z_1 = (1, 0) & (n = 0, 2, 4, \dots) \\ z_2 = (1, \pi) & (n = 1, 3, 5, \dots), \end{cases}$$

missä  $z_2 = -z_1$ .



Kuva 6: Yhtälön  $z^2 = -1$  ratkaisut

Merkitään  $i = (0, 1)$ . Silloin  $i^2 = -1$ . Lukua  $i$  kutsutaan *imaginaariyksiköksi*, ja  $y$ -akselia *imaginaariakseliksi*. Muotoa  $z = (0, y) = iy$  olevia kompleksilukuja kutsutaan *puhtaasti imaginaarisiksi*. Muistamme, että muotoa  $z = (x, 0) = x$  olevia kompleksilukuja kutsutaan *reaalisiksi*. Jos

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + yi = x + iy,$$

niin

$$x = \operatorname{Re} z$$

on  $z$ :n *reaaliosa* ja

$$y = \operatorname{Im} z$$

on  $z$ :n *imaginaariosa*. Molemmat ovat siis reaalisia, joten

$$z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z.$$

Lukua

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy$$

kutsutaan  $z$ :n *liittoluvuksi* eli *kompleksikonjugaatiksi*. Määritelmistä seuraa, että

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$$

$$z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z.$$

Jos  $z = (r, \varphi)$ , niin  $\bar{z} = (r, -\varphi)$ . Kuvaus  $z \mapsto \bar{z}$  on peilaus  $x$ -akselissa.

Oliko edellä tehty merkintä  $z = x + iy$  täysin perusteltu? Olkoon  $z = (x, y)$  kompleksiluku ja  $t = (t, 0)$  reaalinen kompleksiluku. Silloin

$$tz = (t, 0)(x, y) = (tx - 0y, ty + 0x) = (tx, ty).$$

Jos  $t \neq 0$ , on

$$\frac{z}{t} = \frac{1}{t}z.$$

Kompleksiluku kerrotaan (ja jaetaan) reaaliluvulla siis samalla tavalla kuin lineaarialgebrassa vektori kerrotaan (ja jaetaan) reaaliluvulla.

Lineaarialgebran tapaan  $\mathbb{R}^2$ :ssa käytetään nyt kantaa  $e_1 = 1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = i = (0, 1)$  ja laskut todellakin on luvallista suorittaa ”tavallisten” algebran kaavojen mukaisesti:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy.$$

Tavallinen algebra sujuu näillä lausekkeilla samoilla säännöillä kuin reaalilukujen algebra. Ainoa ero on, että

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \\ i^7 &= -i \\ i^8 &= 1 \quad \text{jne.} \end{aligned}$$

(Lisäksi on  $i^0 = 1$  ja  $i^1 = i$ ).

Kompleksiluvun  $z = x + iy$  itseisarvolla eli *modulilla*  $|z|$  tarkoitetaan vektorin  $(x, y)$  pituutta

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

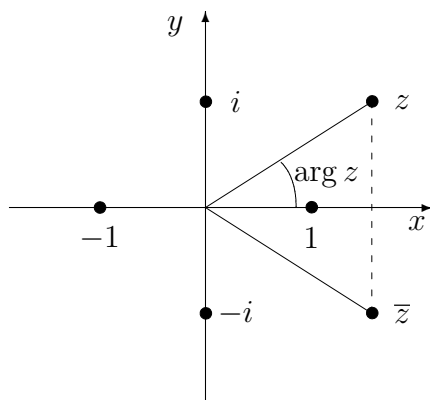
Jos  $t > 0$ , niin  $|tz| = t|z|$ .

**Lause 1**  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$  ( $= |\bar{z}|$ ).

*Todistus.*  $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 - (iy)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$

Kompleksiluvun  $z \neq 0$  vaihekulmaa  $\varphi$  kutsutaan sen *argumentiksi*  $\arg z$ . Näin ollen

$$\begin{aligned}\arg \bar{z} &= -\arg z \\ x &= |z| \cos(\arg z) \\ y &= |z| \sin(\arg z) \\ z &= |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))\end{aligned}$$



Kuva 7: Kompleksiluvun argumentti ja liittoluku

Usein merkitään  $r = |z|$  ja  $\varphi = \arg z$ . Silloin

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Kertolaskun geometrisen määritelmän perusteella

$$\begin{aligned}|z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2.\end{aligned}$$

Täydellisen induktion periaatteesta seuraa, että

$$\begin{aligned}|z_1 z_2 \cdots z_n| &= |z_1| |z_2| \cdots |z_n| \\ \arg(z_1 z_2 \cdots z_n) &= \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n \\ z_1 z_2 \cdots z_n &= r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)).\end{aligned}$$



### 1.3 Käänteisluku ja jakolasku.

Olkoon  $z \neq 0$ . Silloin

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{1}{z_2} z_1 = z_1 \frac{1}{z_2}.\end{aligned}$$

Jakolaskussa lukujen hajottaminen reaali- ja imaginaariosiin pidentää lausekkeitä huomattavasti.

Kaavoista seuraa

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{z} \right| &= \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \left| \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \right| = \frac{1}{|z|^2} |\bar{z}| = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg \frac{1}{z} &= \arg \left( \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \right) = \arg \frac{1}{|z|^2} + \arg \bar{z} = 0 - \arg z = -\arg z \\ \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg \left( z_1 \frac{1}{z_2} \right) = \arg z_1 + \arg \frac{1}{z_2}.\end{aligned}$$

Kahden kompleksiluvun  $z_1 \neq 0$  ja  $z_2 \neq 0$  osamäärä muodostetaan jakamalla itseisarvot keskenään ja vähentämällä nimittäjän argumentti osoittajan argumentista. Kyseessä on siis myös geometrisesti kertolaskulle käänteinen laskutoimitus.

### 1.4 Esimerkkejä.

1. Suorita jakolasku  $\frac{1+i}{2-i}$ , ts. jaa  $\frac{1+i}{2-i}$  reaali- ja imaginaariosiin.

Tehtävä ratkaistaan poistamalla  $i$  nimittäjästä. Jos lavennetaan nimittäjän liittoluvulla, nimittäjään tulee  $|2-i|^2$ , joka on reaalinen:

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{2-i} &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(1+i)(2+i)}{2^2 - (i)^2} \\ &= \frac{2+3i-1}{5} = \frac{1+3i}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\end{aligned}$$

2. Vastaavasti

a)  $\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = -i$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{i} = 0, \quad \operatorname{Im} \frac{1}{i} = -1$$

$$\text{b) } \frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3-2+5i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{5}{2}$$

3. Olkoon  $z \neq i$ . Laske  $\left| \frac{z-i}{1+iz} \right|$ .

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-i}{1+iz} \right|^2 &= \frac{z-i}{1+iz} \cdot \overline{\left( \frac{z-i}{1+iz} \right)} = \frac{z-i}{1+iz} \cdot \frac{\bar{z}+i}{1-i\bar{z}} \\ &= \frac{|z|^2 + 1 + i(z - \bar{z})}{1 + |z|^2 + i(z - \bar{z})} = 1 \end{aligned}$$

Toinen tapa:

$$\frac{z-i}{1+iz} = \frac{z-i}{i(-i+z)} = \frac{1}{i} = -i$$

4. Olkoon  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Silloin

$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= x_1 - iy_1 \\ \overline{z_2} &= x_2 - iy_2. \end{aligned}$$

Siis

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Koska

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

on

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}.$$

Koska

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - i(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{x_1^2 + y_1^2}$$

on

$$\overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

5. **Kolmioepäytälö** Olkoot  $a$  ja  $b$  kompleksilukuja. Silloin

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)(\bar{a} + \bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b \\ &= |a|^2 + |b|^2 + a\bar{b} + \overline{(a\bar{b})} \\ &= |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re} a\bar{b}. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}|a - b| &= (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b \\ &= |a|^2 + |b|^2 - 2\operatorname{Re} a\bar{b}.\end{aligned}$$

Laskemalla yhteen saadaan hupaisa kaava

$$|a + b| + |a - b| = 2(|a| + |b|)$$

eli suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on kaksi kertaa sivujen neliöiden summa.

Koska

$$|a| = \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2},$$

on

$$-|a| \leq \operatorname{Re} a \leq |a|, \quad -|a| \leq \operatorname{Im} a \leq |a|.$$

Koska kertolaskun geometrisen määritelmän mukaan  $|a\bar{b}| = |ab|$ , on

$$-|ab| \leq \operatorname{Re} a\bar{b} \leq |ab|,$$

joten

$$\begin{aligned}|a + b|^2 &\leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2 \\ |a + b|^2 &\geq |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| = (|a| - |b|)^2.\end{aligned}$$

Tuloksena on tavallinen *kolmioepäyhtälö*:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|,$$

joka nyt on voimassa myös kompleksiluvuille. Soveltamalla kolmioepäyhtälöä esitykseen  $z = x + iy$  saadaan

$$||x| - |y|| \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

## 1.5 Moivre'n kaava.

Olkoon  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Silloin

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Jos valitaan  $r = 1$ , jolloin  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , saadaan ns. *Moivre'n kaava*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & 1 & & 1 \\
& & & 1 & & 2 & & 1 \\
& & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
& 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Kuva 8: Pascalin kolmio

Tämä on kätevä moninkertaisten kulmien sinien ja kosinien laskemiseen. Valitaan esim.  $n = 5$ .

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\cos 5\varphi &= \operatorname{Re} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 \\
&= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 5\varphi &= \operatorname{Im} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 \\
&= \sin^5 \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Näitä voidaan vielä muokata eri muotoihin. Sijoitetaan esimerkiksi ensimmäiseen  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$  :

$$\begin{aligned}
\cos 5\varphi &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + 5 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi)^2 \\
&= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi + 10 \cos^5 \varphi + 5 \cos \varphi (1 - 2 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \\
&= 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}
\cos 3\varphi &= \operatorname{Re} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 \\
&= \operatorname{Re} (\cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi) \\
&= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \\
&= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \\
&= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Tästä seura esimerkiksi kaava

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi.$$

Unohtuneet kaavat on helppo johtaa:

Koska

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 \\ &= \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \\ \sin 2\varphi &= 2 \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

## 1.6 Eulerin kaava.

Jos  $x \in \mathbb{R}$ , niin

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ i^6 &= -1 \\ i^7 &= -i \text{ jne.}\end{aligned}$$

Sijoitetaan  $e^x$ :n sarjakehitelmään  $x = i\varphi$ . Silloin

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \cdots \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi,\end{aligned}$$

joten olemme saaneet ns. *Eulerin kaavan*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Tämän perusteella kompleksiluvuilla  $z$ ,  $\arg z = \varphi$ ,  $|z| = r$ , on esitys

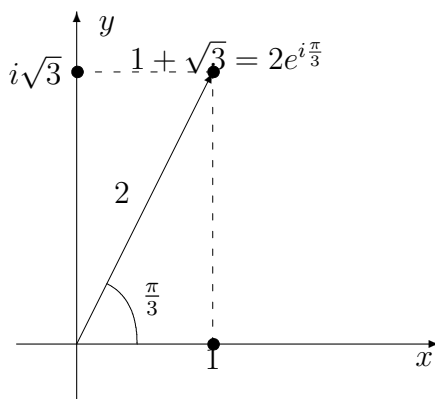
$$z = re^{i\varphi}.$$

Moivren kaava saa muodon

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

## 1.7 Esimerkkejä.

1. Laske  $(1 + i\sqrt{3})^6$  Moivren kaavan avulla.



Kuva 9:

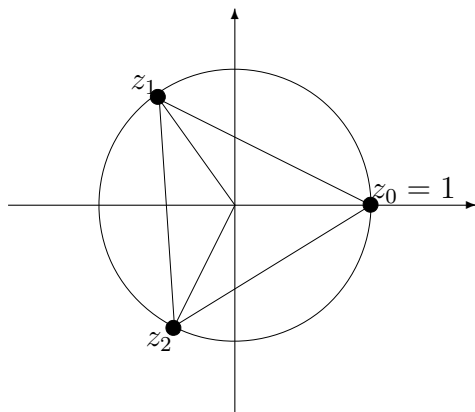
$$(1 + i\sqrt{3})^6 = 2^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 2^6 e^{2\pi i} = 64.$$

2. Ratkaise yhtälö  $z^3 = 1$ .

Merkitään  $z = re^{i\varphi}$ . Silloin  $z^3 = r^3 e^{3i\varphi}$ . Koska  $|e^{3i\varphi}| = 1$ , on

$$\begin{aligned} |z|^3 &= r^3 |e^{3i\varphi}| = r^3 = 1 \Leftrightarrow r = 1. \\ z^3 = 1 &\Leftrightarrow r = 1 \text{ ja } e^{3i\varphi} = 1 = e^{n2\pi i}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ z^3 = 1 &\Leftrightarrow \varphi = n\frac{2}{3}\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$z_1 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Kuva 10: Yhtälön  $z^3 = 1$  ratkaisut

Tarkastus:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= -\frac{1}{8} + 3i\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1. \end{aligned}$$

Yleisesti ottaen binomiyhtälön

$$z^n = 1$$

juuret ovat yksikköympyrän kehällä. Ne sijaitsevat säännöllisen  $n$ -kulmion kärjissä, jonka yksi kärki on pisteessä 1.

3. Ratkaise yhtälö  $z^4 = 1$ .

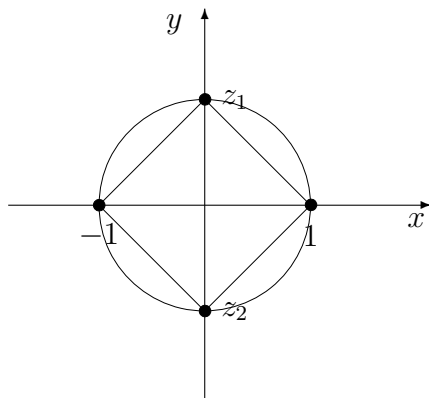
Piirretään yksikköympyrä ja sen sisään neliö, jonka yksi kärki on pisteessä  $z = 1$ .

Juuret ovat neliön kärjissä:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_2 &= i \\ z_3 &= -1 \\ z_4 &= -i. \end{aligned}$$

4. Laske  $e^{i\pi}$ .

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$



Kuva 11: Yhtälön  $z^4 = 1$  ratkaisut

## 1.8 Binomiyhtälö

Yleisellä binomiyhtälöllä tarkoitetaan yhtälöä

$$z^n = w,$$

missä  $z$  on tuntematon ja  $w$  annettu kompleksiluku. Edellä käsiteltiin muotoa

$$z^n = 1 \tag{1}$$

olevia erikoistapauksia. Jos merkitään  $z = re^{i\varphi}$ , saadaan (1) muotoon

$$r^n e^{in\varphi} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r &= 1 \\ n\varphi &= k2\pi. \end{cases}$$

Yhtälön (1) juuret ovat siis

$$z_k : \begin{cases} r &= 1 \\ \varphi &= k\frac{2\pi}{n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Kun  $k = 0$ , saadaan triviaali juuri  $z_0 = 1$ .

Kun  $k = 1$ , saadaan niin sanottu  $n$ :s yksikköjuuri

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

jolle käytetään merkintää  $\varepsilon_n$ . Koska

$$\varepsilon_n^k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = z_k,$$



voidaan muut (1):n juuret esittää  $\varepsilon_n$ :n potensseina, ja kaikki  $\varepsilon_n$ :n potenssit ovat (1):n juuria.

Yhtälöllä (1) on täsmälleen niin monta juurta kuin  $\varepsilon_n$ :llä on eri potenssia. Nämä ovat

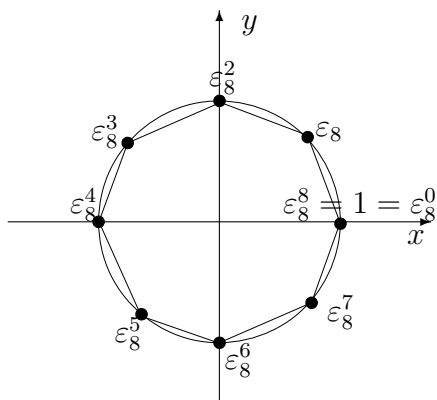
$$\begin{aligned}\varepsilon_n^0 &= 1 \\ \varepsilon_n^1 &= \varepsilon_n \\ \varepsilon_n^2 & \\ &\vdots \\ \varepsilon_n^{n-1}\end{aligned}$$

sillä

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^n &= e^{in\frac{2\pi}{n}} = e^{2\pi i} = 1 \\ \varepsilon_n^{n+1} &= \varepsilon_n \\ \varepsilon_n^{n+2} &= \varepsilon_n^2 \text{ jne.}\end{aligned}$$

(Kun lasketaan pelkästään luvuilla  $\varepsilon_n^k$ , joiden moduli =1, on kertolasku pelkkää argumenttien yhteenlaskua.)

Binomiyhtälöllä (1) on täsmälleen  $n$  kpl eri juurta. Nämä sijaitsevat kompleksitasossa sen säännöllisen  $n$ -kulmion kärjissä, jonka yksi kärki on pisteessä  $z = 1$  ja keskipiste on origossa.



Kuva 12: Yhtälön  $z^8 = 1$  ratkaisut

**Esimerkki.** Olkoon  $a$  yhtälön

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \quad (2)$$

Kuva 13:

Kuva 14:

juuri. Osoita, että myös  $a^2$  on yhtälön juuri.

Ratkaisu: Koska

$$1 - z^5 = (1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$

ja  $z = 1$  ei ole (2):n juuri, on

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \Leftrightarrow z^5 = 1, z \neq 1.$$

Näin ollen  $a = \varepsilon_5^k$  jollakin  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Tällöin  $a^2 \neq 1$ . Toisaalta  $a^2 = \varepsilon_5^{2k}$  on yhtälön  $z^5 = 1$  juuri. Siis  $a^2$  on (2):n juuri.

Sama tehtävä ei onnistu, jos astelukua nostetaan yhdellä:

$$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)(1 - z) = 1 - z^6.$$

$a = -1$  on yhtälön  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$  juuri, mutta  $a^2 = 1$  ei ole.

Siirrymme nyt yleiseen binomiyhtälöön

$$z^n = w = \rho e^{i\psi}, \quad \psi > 0. \quad (3)$$

Sijoituksella  $z = re^{i\varphi}$  saadaan

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\psi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n &= \rho \\ n\varphi &= \psi + k2\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Yhtälöllä (3) on juuret

$$z_k : \begin{cases} r &= \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi &= \frac{\psi}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Merkitään

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\psi}{n}}.$$

Silloin muut juuret ovat

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 \varepsilon_n \\ z_2 &= z_0 \varepsilon_n^2 \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= z_0 \varepsilon_n^{n-1} \end{aligned}$$

Kuva 15:

Kuva 16:

Juuret  $z_0, \dots, z_{n-1}$  sijaitsevat sen säännöllisen  $n$ -kulmion kärjissä, jonka yksi kärki on pisteessä  $z_0$  ja keskipiste on origossa.

**Esimerkki.** Yhtälön  $z^4 = -1 = e^{i\pi}$  juuret ovat

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

eli  $z_2 = -z_0$ ,  $z_3 = \overline{z_0}$ , ja  $z_1 = -\overline{z_0}$ .