

1 Kompleksitason geometriaa ja topologiaa

Tavallisessa analyyttisessä geometriassa käyrien yhtälöt esitetään x -koordinaattien ja y -koordinaattien avulla, esimerkiksi

$$y = \frac{1}{x}$$

esittää tasasivuista hyperbeliä, jonka asymptootteina ovat koordinaattiakselit. Jos käyrän yhtälöön sijoitetaan

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

saadaan yhtälö kompleksimuotoon, ts. muotoon

$$F(z, \bar{z}) = 0.$$

Esimerkki.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) &= \frac{1}{\frac{1}{2}(z + \bar{z})} \\ \Rightarrow \frac{1}{4i}(z - \bar{z})(z + \bar{z}) &= 1 \\ \Rightarrow z^2 - \bar{z}^2 + z\bar{z} - z\bar{z} - 4i &= 0 \\ \Rightarrow z^2 - \bar{z}^2 - 4i &= 0. \end{aligned}$$

Kokeilu:

$$\begin{aligned} z &= (1, 1) = 1 + i \\ \bar{z} &= 1 - i \end{aligned}$$

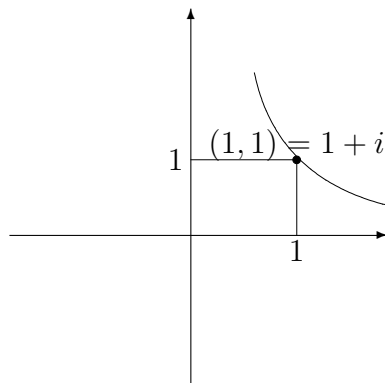
$$z^2 - \bar{z}^2 - 4i = 1 - 1 + 2i - (1 - 1 - 2i) - 4i = 0.$$

Analyyttinen geometria kompleksilukumerkinnöin näyttäisi olevan hyvin kätevä ratkaisu.

Jos kääntäen on annettu muotoa $F(z, \bar{z}) = 0$ oleva yhtälö, niin se hajoaa kahdeksi yhtälöksi:

$$F(z, \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} F(z, \bar{z}) = 0 \\ \operatorname{Im} F(z, \bar{z}) = 0 \end{cases}$$

Kun näihin vielä sijoitetaan $z = x + iy$ ja $\bar{z} = x - iy$, saadaan kaksi reaalista kahden tuntemattoman yhtälöä. Jotta yhtälö $F(z, \bar{z}) = 0$ esittäisi tasokäyrää,



Kuva 1: Tasasivuinen hyperbeli

on yleensä näiden kahden yhtälön oltava oleellisesti samoja eli esitettävä samaa käyrää (tai toisen yhtälön oltava identtisesti voimassa).

Esimerkki.

Hajotetaan $z^2 - \bar{z}^2 - 4i = 0$ reaali- ja imaginaariosiin.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}^2 - 4i) &= \operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}^2) = \operatorname{Re}[(z - \bar{z})(z + \bar{z})] \\ &= \operatorname{Re}(2iy2x) = 0 \quad \text{kaikille } (x, y) \\ \operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}^2 - 4i) &= \operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}^2) - 4i = \operatorname{Im}(4ixy) - 4i = 4ixy - 4i = 0 \\ &\Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Suoran yhtälö. Tavallisessa muodossa suoran yhtälö on

$$Ax + By + C = 0; \quad A, B, C \in \mathbb{R}, \quad A^2 + B^2 > 0.$$

Sijoitetaan $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \frac{A}{2}(z + \bar{z}) + \frac{B}{2i}(z - \bar{z}) + C &= 0 \quad , \\ A(z + \bar{z}) - iB(z - \bar{z}) + 2C &= 0 \quad , \\ (A - iB)z + (A + iB)\bar{z} + 2C &= 0. \end{aligned}$$

Merkitään $A + iB = a$ ja $2C = b$. Silloin yhtälö tulee muotoon

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0; \quad a \neq 0, \quad b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Suoran yhtälö on siis aina tyyppiä (1).

Tarkastellaan kääntäen yhtälöä

$$\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$$

ja oletetaan, että $a = \bar{\beta} \neq 0$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma \\ &= 2\operatorname{Re} \bar{\beta} z + \gamma. \end{aligned}$$

Olkoon $\beta = A + iB$ ja $\frac{1}{2}\gamma = C$. Silloin yhtälö tulee muotoon

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re} \bar{\beta} z + \frac{1}{2}\gamma = \operatorname{Re} ((A - iB)(x + iy)) + C \\ &= Ax + By + C. \end{aligned}$$

Kaikki muotoa (1) olevat yhtälöt esittävät siis suoraa.

Mitä sitten esittää yhtälö

$$\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0, \tag{2}$$

jos kertoimet α, β ja γ eivät toteuta ehtoja $\alpha = \bar{\beta}$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$? Olkoot siis $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $|\alpha| + |\beta| > 0$. (Jos $\alpha = \beta = 0$, yhtälö surkastuu.) Tässä on ehkä parasta sijoittaa

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + ia_2, \\ \beta &= b_1 + ib_2, \\ \gamma &= c_1 + ic_2, \\ z &= x + iy, \\ \bar{z} &= x - iy. \end{aligned}$$

Yhtälö tulee muotoon

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) + c_1 + ic_2 \\ &= a_1x - a_2y + b_1x + b_2y + c_1 + i(a_2x + a_1y + b_2x - b_1y + c_2) \\ &= (a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y + c_1 + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y + c_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y + c_1 = 0 \\ (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y + c_2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Yhtälö hajoaa siis kahden suoran yhtälöksi.

On muita vaihtoehtoja, joista voisi tehdä pienen harjoitustyön.

1) Toinen yhtälö toteutuu identtisesti

a) $c_2 = (a_1 - b_1) = (a_2 + b_2) = 0$ eli $\gamma \in \mathbb{R}$ ja $\alpha = \bar{\beta}$. Tämä tapaus oli edellä

esillä ja se esittää yhtä suoraa.

$$b) \ c_1 = (a_2 - b_2) = a_1? b_1 = 0$$

Esittää yhtä suoraa (alempi yhtälö). Itse asiassa tämä tilanne palautuu edelliseen korvaamalla (2) yhtälöllä

$$i\alpha z + i\beta \bar{z} + i\gamma = 0,$$

sillä

$$\begin{aligned} i\gamma &= -c_2 + ic_1 \\ i\beta &= -b_2 + ib_1 \\ i\alpha &= -a_2 + ia_1. \end{aligned}$$

2) Yhtälöt (3) esittävät kahta toisiaan leikkaavaa suoraa, jolloin (2) esittää yhtä pistettä.

3) Suorat (3) ovat yhdensuuntaisia

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \\ 0 &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & -a_2 + b_2 \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \\ a_1^2 + a_2^2 &= b_1^2 + b_2^2 \\ &\Leftrightarrow \\ |\alpha| &= |\beta| \end{aligned}$$

Jos suorat (3) eivät ole samoja, (2) ei esitä mitään.

4) Suorat (3) ovat samoja.

$$a) \ c_1 = c_2 = 0 \text{ ja } |\alpha| = |\beta|$$

Suorat (3) kulkevat origon kautta. (2) esittää origon kautta kulkevaa suoraa aina, kun $|\alpha| = |\beta|$ ja $c_1 = c_2 = 0$.

$$b) \ c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0 \text{ ja } |\alpha| = |\beta|.$$

Joka tapauksessa suorat ovat yhdensuuntaisia eli $|\alpha| = |\beta|$. Olkoon

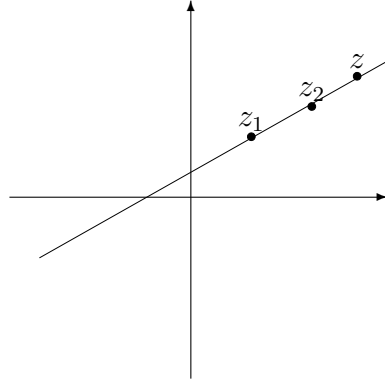
$$t = \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2} = \frac{-a_2 + b_2}{a_1 - b_1}.$$

Lisäksi $a_2 + b_2 \neq 0$, $a_1 b_1 \neq 0$, koska alempi yhtälö ei identtinen tai mahdoton.

Suorat ovat samoja $\Leftrightarrow \frac{c_1}{c_2} = t$.

Yhtälö (2) näyttäisi esittävän suoraa siis tapauksissa 1)a), 1)b), 4)a) ja 4)b).

Suoran esittäminen parametrimuodossa.



Kuva 2:

Pisteiden z_1 ja z_2 kautta kulkevan suoran yhtälö voidaan esittää muodossa

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kun $t = 0$ saadaan $z = z_1$ ja kun $t = 1$ saadaan $z = z_2$. Kun $0 < t < 1$, on z pisteiden z_1 ja z_2 välissä.

Eliminoidaan parametri t seuraavasti:

$$\begin{aligned} z - z_1 &= t(z_2 - z_1), \\ \bar{z} - \bar{z}_1 &= t(\bar{z}_2 - \bar{z}_1), \end{aligned}$$

joten

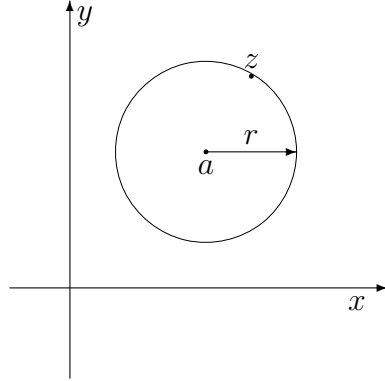
$$\frac{z - z_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1},$$

mikä on eräs tapa muodostaa pisteiden z_1 ja z_2 kautta kulkevan suoran yhtälö. Tämä on yhtäpitävä muodon

$$\begin{aligned} \arg \frac{z - z_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} &= \arg \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} + n2\pi, \\ \arg(z_2 - z_1) - \arg(\bar{z} - \bar{z}_1) &= \arg(z_2 - z_1) - \arg(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + n2\pi \\ 2 \arg(z - z_1) &= \arg(z_2 - z_1) + n2\pi \end{aligned}$$

kanssa. Itse asiassa tämä on geometrisesti luontevin tapa ilmoittaa pisteiden z_1 ja z_2 kautta kulkevan suoran yhtälö.

Kompleksimerkintä antaa siis hyvin erilaisia mahdollisuuksia käsitellä analyttistä geometriaa.



Kuva 3: a -keskinen r -säteinen ympyrä

Ympyrän yhtälö.

Jos ympyrän $K = K(a, r)$ keskipiste on a ja säde $r > 0$, sen yhtälö voidaan esittää muodossa

$$|z - a| = r$$

eli

$$|z - a|^2 = r^2$$

eli

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2 = r^2$$

eli

$$z\bar{z} + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0, \tag{4}$$

missä $\alpha = \bar{\beta}$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma = |a|^2 - r^2$, $r^2 = |a|^2 - \gamma > 0$ eli $\gamma < a\bar{a} = \alpha\beta$. Tämä poikkeaa suoran yhtälöstä ainoastaan termillä $z\bar{z}$.

Kääntäen, jos on annettu $\alpha = a - ib$, $\beta = a + ib$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$, voidaan (4) kirjoittaa nuotoon

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + (a - ib)(x + iy) + (a + ib)(x - iy) + \gamma \\ &= x^2 + y^2 + 2(ax + by) + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - \gamma \end{aligned}$$

Tämä on ympyrä, jos $r^2 = a^2 + b^2 - \gamma > 0$. Keskipiste on tällöin $(-a, -b)$.

Yhtälö $z\bar{z} + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$ esittää ympyrää, jos ja vain jos $\alpha = \bar{\beta}$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma < \alpha\beta$.

Esimerkkejä.

1. Millä ehdolla kolme eri pistettä z_1, z_2, z_3 ovat samalla suoralla? Mitä suoran esitystapaa kannattaa käyttää?

Eräs järkevä ehto saadaan lähtemällä pisteiden z_1 ja z_2 kautta kulkevan suoran parametriesityksestä

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}$$

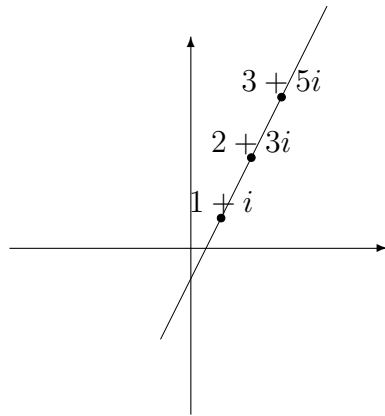
Piste z_3 on tällä suoralla, jos ja vain jos jollekin $t \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + t(z_2 - z_1) \\ \Leftrightarrow z_3 - z_1 &= t(z_2 - z_1) \\ \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= t. \end{aligned}$$

Ehto on siis: osamäärä $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ on reaalinen. Toisin sanoen

$$\begin{aligned} \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= n\pi \\ \arg(z_3 - z_1) &= \arg(z_2 - z_1) + n\pi. \end{aligned}$$

Esim. Ovatko pisteet $1 + i$, $2 + 3i$, $3 + 5i$ samalla suoralla?



Kuva 4: Pisteet $1 + i$, $2 + 3i$ ja $3 + 5i$

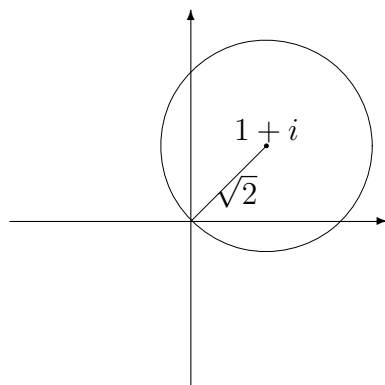
Ratk. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = 3 + 5i$.

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{3 + 5i - 1 - i}{2 + 3i - 1 - i} = \frac{2 + 4i}{1 + 2i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2+4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2+8-4i+4i}{5} \\
&= 2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Siis pisteet ovat samalla suoralla.

2. Mikä on sen ympyrän yhtälö, joka kulkee origon kautta ja jonka keskipiste on $1+i$?



Kuva 5:

Eräs muoto:

$$|z - 1 - i| = \sqrt{2}$$

Tätä voidaan muokata:

$$2 = |z - 1 - i|^2 = (z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i) = z\bar{z} + (-1 + i)z + (-1 - i)\bar{z} + 2.$$

Yhtälö tulee muotoon

$$z\bar{z} + (-1 + i)z + (-1 - i)\bar{z} = 0.$$

Tässä

$$\begin{aligned}
\alpha &= -1 + i, \\
\beta &= -1 - i, \\
\gamma &= 0,
\end{aligned}$$

joten $\alpha = \bar{\beta}$ ja $\gamma < \alpha\beta = 2$.

Suora pisteiden $1+i$ ja $-1+2i$ kautta.

$$\begin{aligned}
z &= 1 + i + t(-1 + 2i - 1 - i) \\
&= 1 + i + t(-2 + i) \\
&= 1 - 2t + i(1 + t).
\end{aligned}$$

Eliminoidaan t :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} z - 1 - i = t(-2 + i) \\ \bar{z} - 1 + i = t(-2 - i) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \frac{z - 1 - i}{\bar{z} - 1 + i} = \frac{-2 + i}{-2 - i} \\ & (-2 - i)z + 2 + 2i + i - 1 = (-2 + i)\bar{z} + 2 - 2i - i - 1 \\ & (-2 - i)z + (2 - i)\bar{z} + 6i = 0. \end{aligned}$$

Tämä on tyyppiä 1)b). Kerrotaan yhtälö i :llä:

$$(1 - 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} - 6 = 0.$$

Tämä on yhtälön perusmuoto.

4. Olkoon z suoran

$$(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 1 = 0$$

piste. Millä suoralla ovat pisteet $z + i$?

Merkitään $w = z + i$. Silloin $z = w - i$, joten

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + i)(w - i) + (1 - i)(\bar{w} + i) + 1 \\ &= (1 + i)w + (1 - i)\bar{w} + 1 - i + 1 + i + 1 \\ &= (1 + i)w + (1 - i)\bar{w} + 3. \end{aligned}$$

5. Oletetaan, että pisteet z_1, z_2, z_3, z_4 eivät ole samalla suoralla ja toteuttavat ehdon

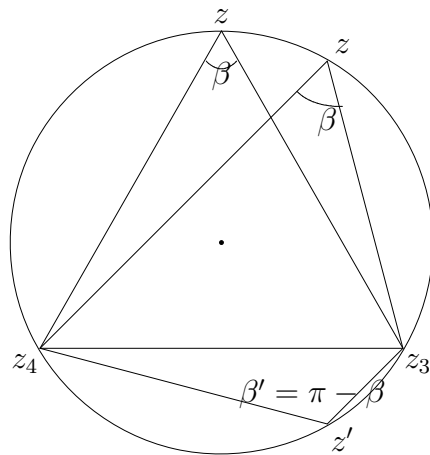
$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \in \mathbb{R}.$$

Osoitettava, että pisteet ovat samalla ympyrän kaarella.

Koulugeometria: Niiden pisteiden ura, josta annettu jana näkyy annetun kulman suuruudessa kulmassa, on janan päätepisteiden kautta kulkeva ympyräkaari.

Kolmiossa kahden kulman summa=kolmannen vieruskulma. Siis $\beta = \arg(z - z_3) - \arg(z - z_4) = \arg \frac{z - z_3}{z - z_4}$.

$$\begin{aligned} & \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow \arg \left[\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right] = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ & \Leftrightarrow \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} + n\pi \\ & \Leftrightarrow z_1 \text{ ja } z_2 \text{ ympyrällä, josta jana } z_3 z_4 \text{ näkyy vakiokulmassa.} \end{aligned}$$



Kuvio tulee selkeämmöksi,
jos oletetaan, että suora
 z_3z_4 on x -akselin
suuntainen.

Kuva 6:

Kompleksitason metriikka. Olkoon $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus, jolle

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Tällöin d on *metriikka* $\mathbb{C}$:ssä, sillä

1. $d(z_1, z_2) \geq 0 \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
3. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1) \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
4. $d(z_1, z_3) = |z_1 - z_3| = |z_1 - z_2 + z_2 - z_3|$
 $\leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$

Esimerkkejä.

1. Määrittää lausekkeen $|z^2 + 2iz|$ suurin ja pienin arvo joukossa $|z| = 1$.

$$|z^2 + 2iz| = |z(z + 2i)| = |z||z + 2i| = |z + 2i| = |z - (-2i)| = d(z_1, -2i)$$

Kolmioepäyhtälön perusteella

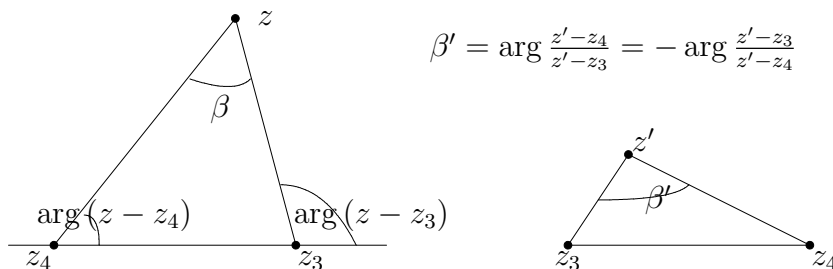
$$2 = ||z| - |-2i|| \leq |z - (-2i)| \leq |z| + |-2i| = 3.$$

Kun $z = i$, on $|z^2 + 2iz| = 3$ eli maksimi.

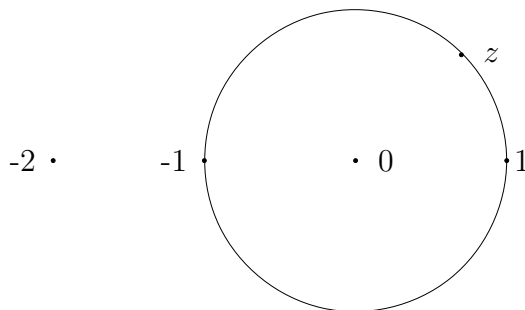
Kun $z = -i$, on $|z^2 + 2iz| = 1$ eli minimi.

Yleisesti epäyhtälössä

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



Kuva 7:



Kuva 8:

esiintyy yhtäsuuruus, kun (ja vain kun) z_1 ja z_2 ovat samalla origon kautta kulkevalla suoralla.

2. Määrä jokin sellainen reaaliluku $\delta > 0$, että

$$|z^5 + 3z^2| < 0,1$$

kun $|z| < \delta$. Tämä on tyypillinen $\varepsilon - \delta$ -tehtävä. (vrt. seuraava luku.) Tarkastellaan funktion $f(z) = z^5 + 3z^2$ jatkuvuutta origossa. Valitaan $\varepsilon = 0,1$. Pyritään löytämään $\delta > 0$ siten, että

$$d(z, 0) < \delta \Rightarrow |f(z) - f(0)| < 0,1.$$

$$|z^5 + 3z^2| \leq |z|^5 + 3|z|^2 \leq |z| + 3|z| = 4|z|, \text{ kun } |z| < 1.$$

$4|z| < 0,1$, kun $|z| < \frac{0,1}{4} = 0,025$. Valitaan $\delta = 0,025$.

3. Olkoot z_1, z_2, z_3 kompleksilukuja. Osoita, että $|z_1 + z_2 + z_3| \geq |z_1| - |z_2| - |z_3|$.

Tod.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + z_3| &\stackrel{\Delta\text{-ey}}{\geq} ||z_1 + z_2| - |z_3|| \geq |z_1 + z_2| - |z_3| \\ &\stackrel{\Delta\text{-ey}}{\geq} ||z_1| - |z_2|| - |z_3| \geq |z_1| - |z_2| - |z_3|. \end{aligned}$$

Kompleksitason topologia. Pisteen $a \in \mathbb{C}$ r -säteinen ympyräympäristö eli r -ympäristö määritellään joukkona

$$U(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}.$$

Piste a on joukon A *sisäpiste*, jos $U(a, r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Joukko $A \subset \mathbb{C}$ on *avoin*, jos jokainen piste $a \in A$ on a :n sisäpiste.

Joukko $F \subset \mathbb{C}$ on *suljettu*, jos sen komplementti $\mathbb{C} \setminus F$ on avoin. Komplementille ei ole vakiintunut hyvää merkintää. Voimme käyttää esimerkiksi merkintää $C(F) = \mathbb{C} \setminus F$.

Esimerkkejä *avoimista* joukoista:

- (i) $\mathbb{C}$ ja $\emptyset$ ovat avoimia
- (ii) Kiekko $D = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ on avoin
- (iii) Punkteerattu taso

$$\mathbb{C}'_a = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq a\}$$

on avoin. (Merkintä $\mathbb{C}'_a$ ei ole aivan yleisesti käytössä.)

Esimerkkejä *suljetuista* joukoista:

- (i) $\mathbb{C}$ ja $\emptyset$ ovat suljettuja
- (ii) Suljettu kiekko $\overline{D} = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ on suljettu
- (iii) Yksiöt $\{a\}$ ovat suljettuja.

Olkoon $A \subset \mathbb{C}$. Komplementin $C(A)$ sisäpisteitä sanotaan A :n *ulkopisteiksi*. Jos piste ei ole A :n sisä- eikä ulkopiste, niin se on A :n *reunapiste*.
Olkoon

$\text{Int}A = A$:n sisäpisteiden joukko

$\text{Ext}A = A$:n ulkopisteiden joukko

$\text{Bd}A = A$:n reunapisteiden joukko.

Silloin jokaiselle joukolle A on voimassa

$$\mathbb{C} = \text{Int}A \cup \text{Ext}A \cup \text{Bd}A.$$

Joukot $\text{Int}A$, $\text{Ext}A$ ja $\text{Bd}A$ ovat pistevieraita. Niistä kaksi voi olla tyhjiä joukkoja.

Esimerkki. $A = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Silloin $\text{Int}A = \text{Ext}A = \emptyset$ ja $\text{Bd}A = \mathbb{C}$.

Joukko $\overline{A} = A \cup \text{Bd}A$ on A :n *sulkeuma*. Joukot $\text{Int}A$ ja $\text{Ext}A$ ovat avoimia ja $\overline{A}$ ja $\text{Bd}A$ suljettuja.

Joukko A on pisteen a *ympäristö*, jos $a \in \text{Int}A$.

Piste a on joukon A *kasaantumispiste*, jos jokainen a :n ympäristö sisältää a :sta eroavan A :n pisteen.

Pistejonon suppeneminen. Olkoon $z_1, z_2, \dots = (z_n)$ kompleksitason (päättymätön) pistejono. Jonoa sanotaan *suppenevaksi* ja kompleksilukua z sen *raja-arvoksi*, jos jokaista z :n ympäristöä U vastaa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n > n_0 \Rightarrow z_n \in U.$$

Tällöin merkitään $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Määritelmässä voidaan rajoittua r -ympäristöihin $U(z, r)$.

Itse asiassa $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$.

Esimerkkejä.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{in+1}{n+i} = i$, sillä (kun $n > 1$)

$$\left| \frac{in+1}{n+i} - i \right| = \left| \frac{in+1-in+1}{n+i} \right| = \frac{2}{|n+i|} \leq \frac{2}{n-1} < r, \text{ kun } n > 1 + \frac{2}{r}.$$

Laskut sujuivat siis hyvin samalla tavalla kuin reaalisten jonojen tapauksessa.

2. Olkoon $z_n = x_n + iy_n$ ja $z = x + iy$. Silloin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \end{cases}$$

Tod.a)

Oletus: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Väite: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Tod: Koska (Δ -ey) $|x_n - x| \leq |z_n - z|$ ja $|y_n - y| \leq |z_n - z|$, on $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

b)

Oletus: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Väite: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Tod: Olkoon $r > 0$. Tällöin on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ ja } |y_n - y| < \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Mutta silloin on

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \sqrt{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}} = r$$

arvoilla $n > n_0$. Siis $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Kompleksisille jonoille ovat voimassa summan, tulon ja osamäärän raja-arvoa koskevat säännöt.

Cauchyn konvergenssikriteerio. Jono (z_n) suppenee aina ja vain, kun jokaista positiivilukua ε vastaa kokonaisluku n_ε siten, että

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon \text{ ja } p \geq 0.$$

Todistus.

a) Olkoon jono (z_n) suppeneva, se raja-arvo z ja $\varepsilon > 0$. Silloin on olemassa luku n_ε siten, että

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoot $p \geq 0$ ja $n > n_\varepsilon$ kokonaislukuja. Koska $p + n > n_\varepsilon$ ja $n > n_\varepsilon$, on

$$|z_{n+p} - z| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ja } |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mutta tällöin

$$|z_{n+p} - z_n| = |(z_{n+p} - z) - (z_n - z)| \leq |z_{n+p} - z| + |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b) Olkoon lauseen ehto voimassa. Merkitään $z_n = x_n + iy_n$. Koska

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |z_{n+p} - z_n|, \\ |y_{n+p} - y_n| &\leq |z_{n+p} - z_n|, \end{aligned}$$

ovat (x_n) ja (y_n) reaalisia Cauchyn jonoja. On siis olemassa $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ja $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Tällöin $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = x + iy$.

Esimerkki. Osoitetaan, että suppeneva jono (z_n) on rajoitettu.

Olkoon $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Valitaan $r = 1$. Silloin on olemassa n_1 siten, että

$$z_n \in U(z, 1), \text{ kun } n > n_1.$$

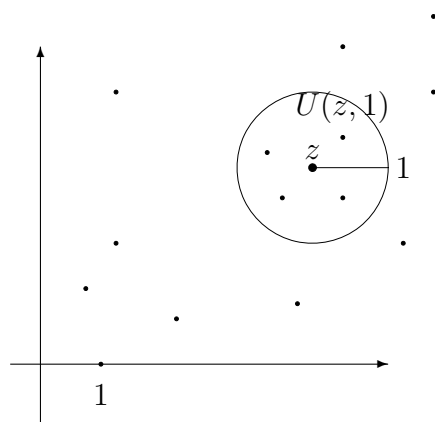
Arvoilla $n > n_1$ on siis

$$|z_n| = |z_n - z + z| \leq |z_n - z| + |z| < |z| + 1.$$

Olkoon $M = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n_1}|, |z| + 1\}$. Silloin

$$|z_n| \leq M \quad \text{kaikille } n = 1, 2, \dots,$$

eli $z_n \in U(0, M)$ kaikille $n = 1, 2, \dots$



Kuva 9: