

1 Analyttiset funktiot

1.1 Kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio

Olkoot A ja B kompleksitason $\mathbb{C}$ osajoukkoja. Kuvausta

$$f : A \rightarrow B$$

sanotaan *kompleksimuuttujan kompleksiarvoiseksi funktioksi*. Usein on $B = \mathbb{C}$.

1. **Vakiokuvaus.** Esimerkiksi kuvaus $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$ on kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio. Yleisesti olkoon $A \subset \mathbb{C}$ ja $a \in \mathbb{C}$. Silloin kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = a \ \forall z \in A$$

on vakiofunktiona kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio.

2. **Identtinen kuvaus.** Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ ja $f(z) = z \ \forall z \in A$. Silloin $f : A \rightarrow A$ on joukon A identtinen kuvaus.

3. Muotoa

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

olevia kuvauksia sanotaan *Möbius-kuvauksiksi*. Jos valitaan $a = d = 1$ ja $b = c = 0$, on $S(z) = z$ eli $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on identtinen kuvaus. Jos $ad - bc = 0$ ja $|c| + |d| \neq 0$ (eli $cz + d \neq 0$), S on vakiokuvaus: Jos $c \neq 0$, on

$$S(z) = \frac{acz + bc}{c(cz + d)} = \frac{acz + ad}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c}$$

Jos $d \neq 0$, on vastaavasti

$$S(z) = \frac{adz + bd}{d(cz + d)} = \frac{bcz + bd}{d(cz + d)} = \frac{b(cz + d)}{d(cz + d)} = \frac{b}{d}.$$

Olkoon $\Delta = ad - bc \neq 0$. Erotetaan kaksi tapausta:

a) $c \neq 0$. Kuvaus $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ on määritelty, kun $cz + d \neq 0$ eli kun $z \neq -\frac{d}{c}$. Kuvaus on bijektio

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\},$$

sillä yhtälöllä

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} = w &\Leftrightarrow az+b = cwz+dw \\ &\Leftrightarrow (a-cw)z = dw-b \\ &\Leftrightarrow z = \frac{dw-b}{a-cw} \end{aligned}$$

on täsmälleen yksi ratkaisu z , kun $w \neq \frac{a}{c}$. (Voidaan jo nyt havaita, että $S(-\frac{d}{c} = \infty$ ja $S(\infty) = \frac{a}{c}$. Kuvaus S on siis bijektio $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ongelmaksi jää vain joukon $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ määrittely topologisena avaruutena.)
b) $c = 0$. Koska $ad - bc \neq 0$, on $d \neq 0$. Kuvaus

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b}{d}$$

on nyt määritelty kaikille $z \in \mathbb{C}$. Kuvaus on bijektio $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, sillä

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{d} = w &\Leftrightarrow az = dw - b \\ &\Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{a} \end{aligned}$$

(koska $ad - bc \neq 0$ ja $c = 0$, on $a \neq 0$). (Tässä tapauksessa $S(\infty) = \infty$, joten $S : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ on bijektio.)

4. Määritellään $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ asettamalla

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{r}{r+1}e^{i\varphi}, \quad f(0) = 0.$$

Koska kuvaus $r \mapsto \frac{r}{r+1}$ on bijektio $]0, \infty[\rightarrow]0, 1[$ on

$$f : \mathbb{C} \rightarrow U(0, 1)$$

bijektio. Jos merkitään $z = re^{i\varphi}$, on $r = |z|$. Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{1+r}re^{i\varphi} = \frac{1}{1+|z|}z.$$

Kuvaus $f(z) = \frac{z}{1+|z|}$ on siis bijektio $\mathbb{C} \rightarrow U(0, 1)$.

5. **Neliöjuuri.** Tarkastellaan kuvausta $f : z \mapsto z^2$. Binomiyhtälöllä $z^2 = w$ on kaksi ratkaisua, joille käytetään merkintöjä $\sqrt{w}$ ja $-\sqrt{w}$. Jos $w = re^{i\varphi}$, niin

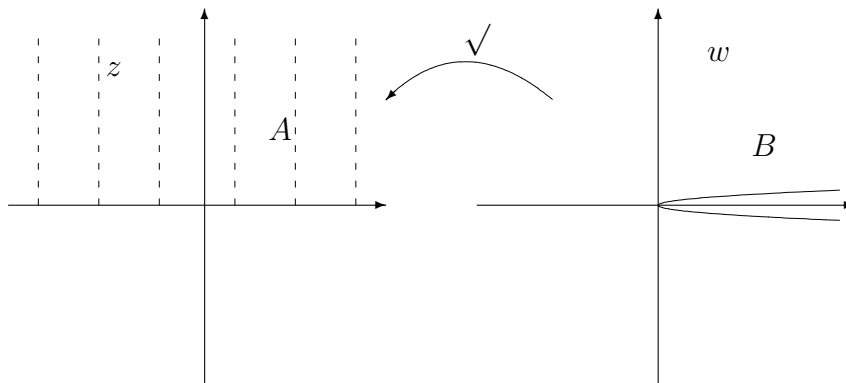
$$\sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}} \text{ ja } -\sqrt{w} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Kuvaus $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on siis surjektio, mutta ei injektio, sillä pisteille $w \neq 0$ kuvautuu aina kaksi pistettä

$$z_1 = \sqrt{w} \text{ ja } z_2 = -\sqrt{w}.$$

(On huomattava, että ei ole mitään yleistä tapaa erottaa, kumpi neliöjuurista on z_1 ja kumpi z_2 . Jos toista merkitään $\sqrt{w}$:llä, niin toinen on $-\sqrt{w}$.)

Olkoon $A = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ ja $B = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.



Kuva 1:

Silloin $f : A \rightarrow B$ on bijektio. Sen käänteiskuvausta $f^{-1} : B \rightarrow A$ sanotaan *neliöjuuren haaraksi*, joka on määritelty pitkin positiivista reaaliakselia aukileikatussa tasossa.

Neliöjuuri voidaan määritellä jokaisessa origoon päättyvää sädettä pitkin aukileikatussa tasossa.

Neliöjuuri on yksikäsitteinen, kun sovitaan, miten taso aukileikataan ja kumpaan puolitasoon kuuluva haara valitaan. Ennen kuin voidaan ollenkaan puhua neliöjuuresta, on valittava tason aukileikkaus.

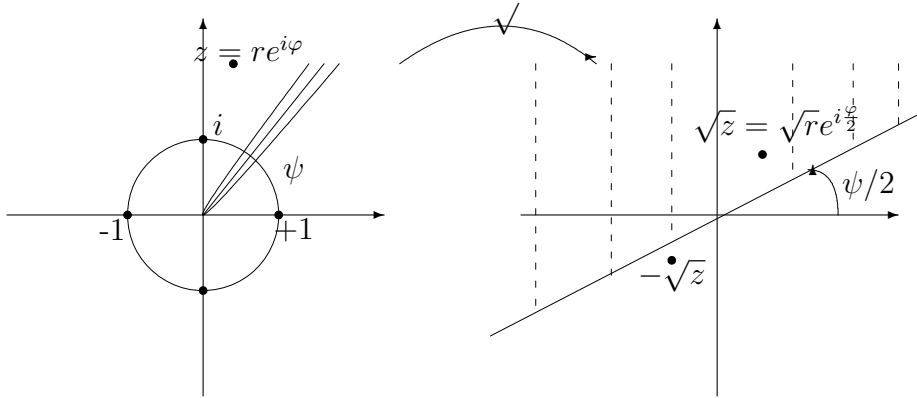
Esimerkki. Mitä vikaa on seuraavassa päättelyssä?

$$\begin{aligned}
 -1 &= -1 \\
 \sqrt{-1} &= \sqrt{-1} \\
 \sqrt{\frac{-1}{1}} &= \sqrt{\frac{1}{-1}} \\
 \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} \\
 (\sqrt{-1})^2 &= (\sqrt{1})^2 \\
 -1 &= 1.
 \end{aligned}$$

jos $\sqrt{}$ määritellään siten, että se kuvaa aukileikatun tason ylemmälle vinolle puolitasolle I , niin $-\sqrt{}$ kuvaa sen alemmalle puolitasolle II .

Onko $\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$?

Ei ole, sillä $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{1} = 1$ ja $\frac{1}{i} = -i$.



Kuva 2:

Onko sitten $-\sqrt{-1} = \frac{-\sqrt{-1}}{-\sqrt{1}}$?

Ei ole, sillä $-\sqrt{-1} = -i$ ja $-\sqrt{1} = -1$ sekä $\frac{-i}{-1} = i \neq -\sqrt{-1}$.

Haaralle I on siis $\sqrt{-1}_I \neq \frac{\sqrt{1}_I}{\sqrt{-1}_I}$ ja haaralle II on siis $\sqrt{-1}_{II} \neq \frac{\sqrt{-1}_{II}}{\sqrt{1}_{II}}$.
Yhtälöä

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

ei siis voida johtaa yhtälöstä $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$, määriteltiinpä neliöjuuri miten hyvänsä.

Voidaan huomata, että

$$\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \text{ ja } -\sqrt{-1} = \frac{-\sqrt{1}}{-\sqrt{-1}},$$

sillä

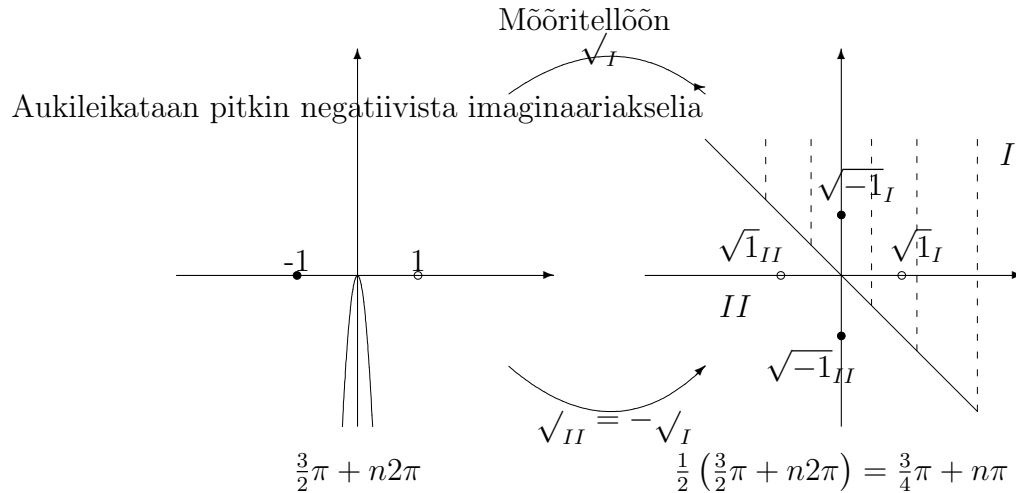
$$i = \frac{i}{1} \text{ ja } -i = \frac{-1}{-i}.$$

Siis

$$\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

pätee haaralle I , mutta ei haaralle II .

$$\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$



Kuva 3:

pätee haaralle II , mutta ei haaralle I .

6. **Kuutiojuuri.** Kuvaus $f(z) = z^3$ on injektio esimerkiksi alueessa $0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}$.

Sen kuva on pitkin positiivista reaaliakselia aukileikattu taso. Kuutiojuurella on tässä alueessa kolme haaraa, joiden kuvana ovat alueet

$$\begin{aligned} I : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{3} \\ II : \frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{4\pi}{3} \\ III : \frac{4\pi}{3} < \arg z < 2\pi \end{aligned}$$

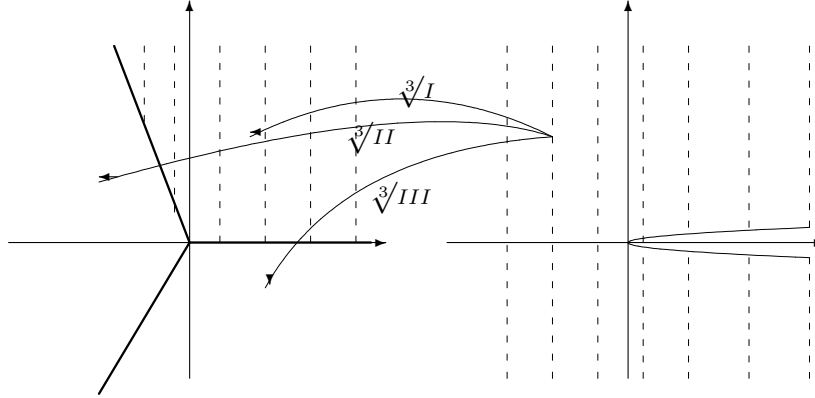
Yleisesti voidaan määritellä $\sqrt[n]{w}$, $n = 2, 3, 4, \dots$

Esimerkki. Määrää suoran $z + \bar{z} - 1 = 0$ kuva Möbius-kuvauksessa $S(z) = \frac{z+1}{z}$.

Mikä suora? Yleinen tapa: x -akselin leikkauspisteessä on $z = \bar{z} = x$. Siis $2x = 1$ eli $x = \frac{1}{2}$.

y -akselin leikkauspisteessä on $z = iy$, $\bar{z} = -iy$. Siis $iy - iy - 1 = 0$ ei toteudu. Kyseessä on siis suora $x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} w &= \frac{z+1}{z} \\ \Leftrightarrow zw &= z+1 \end{aligned}$$



Kuva 4:

$$\Leftrightarrow z(w-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{w-1}$$

Kuvan yhtälö:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-1} + \frac{1}{\bar{w}-1} - 1 &= 0 \\ \bar{w}-1 + w-1 - (\bar{w}-1)(w-1) &= 0 \\ \bar{w} + w - 2 - w\bar{w} + \bar{w} + w - 1 &= 0 \\ w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Ympyrä: $z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$, $\alpha = \bar{\beta}$, $\gamma < \alpha\beta$

$\alpha = \beta = -2$, $\gamma = 3$, $3 < (-2)(-2) = 4$.

Jos $\alpha = a - ib$ ja $\beta = a + ib$, niin keskipiste on $(-a, -b)$ ja säde $\sqrt{a^2 + b^2 - \gamma}$.

Kuvana on siis ympyrä, jonka keskipiste on $(2, 0)$ ja säde on 1.

Saamme erikoistapauksen yleisestä tuloksesta: Möbius-kuvaus kuvaa suoran ympyräksi (tai suoraksi).

Yleisesti suoran $x = n$ yhtälö kompleksimuodossa on

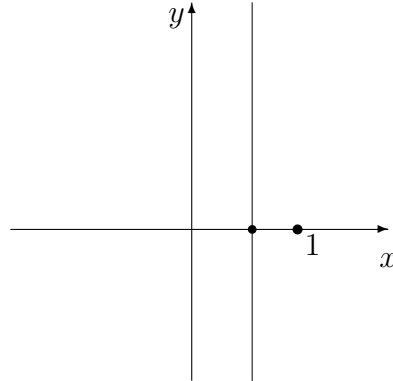
$$2n = 2x = 2\operatorname{Re} z = z + \bar{z}$$

eli

$$z + \bar{z} - 2n = 0.$$

Vastaavasti suoran $y = n$ yhtälö kompleksimuodossa on

$$2in = 2iy = z - \bar{z}$$



Kuva 5:

Kuva 6:

eli

$$z - \bar{z} - 2in = 0.$$

Kertomalla i :llä saadaan yhtälö normaalimuotoon $\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$, $\alpha = \bar{\beta}$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$iz - i\bar{z} + 2n = 0.$$

Kuutiojuuri reaalfunktiona ja kompleksifunktiona.

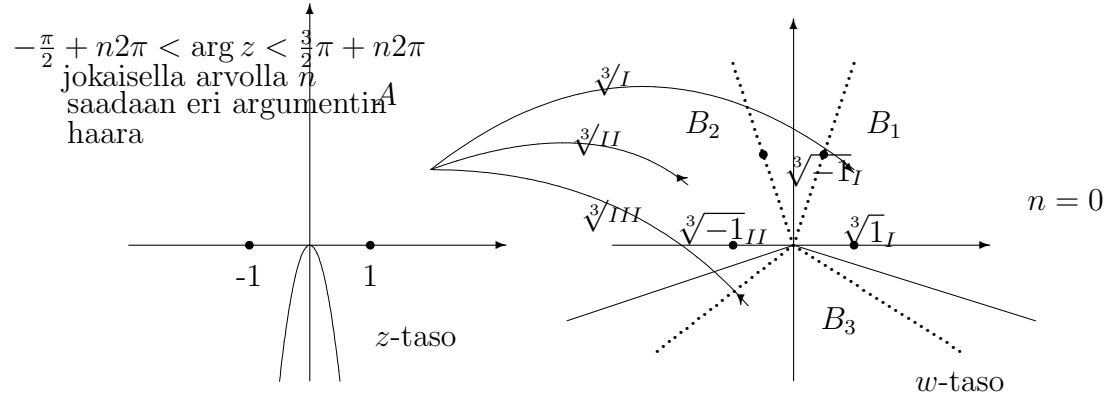
Kuvaus $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ on määritelty kaikille $x \in \mathbb{R}$.

Derivaatta

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

on määritelty kaikille $x \neq 0$. Arvolla $x = 0$ käyrän tangentti on pystysuora eikä funktuolla ole äärellistä derivaattaa. Jatkossa ehkä nähdään, että jo tämä riittää osoittamaan, ettei reaalista kuutiojuurta voida luonnollisella tavallajattaa kompleksifunktioksi.

Tarkastellaan kuutiojuurta kompleksifunktiona. Otetaan määrittelyjoukoksi pitkin negatiivista imaginaariakselia aukileikattu taso $A = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \leq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \arg z = \frac{3\pi}{2}\}$.



Kuva 7:

Kuutiojuurella on A :ssa kolme haaraa, joiden maaleina ovat sektorialueet

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ w \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{6} < \arg w < \frac{\pi}{2} \right\} \quad n = 0 \\ B_2 &= \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} < \arg w < \frac{7\pi}{6} \right\} \quad n = 1 \\ B_3 &= \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \frac{7\pi}{6} < \arg w < \frac{11\pi}{6} \right\} \quad n = 2 \end{aligned}$$

Kuutiojuuren haarat ovat:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{I} &: A \rightarrow B_1 \\ \sqrt[3]{II} &: A \rightarrow B_2 \\ \sqrt[3]{III} &: A \rightarrow B_3 \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{I}$ kuvaa positiivisen reaaliakselin positiiviselle reaaliakselille ja negatiivisen reaaliakselin suoralle $\arg w = \frac{\pi}{3}$.

$\sqrt[3]{II}$ kuvaa positiivisen reaaliakselin suoralle $\arg w = \frac{2\pi}{3}$ ja negatiivisen reaaliakselin negatiiviselle reaaliakselille ($\arg w = \frac{3\pi}{3}$).

$\sqrt[3]{III}$ kuvaa positiivisen reaaliakselin suoralle $\arg w = \frac{4\pi}{3}$ ja negatiivisen reaaliakselin suoralle $\arg w = \frac{5\pi}{3}$.

Reaalinen kuutiojuuri f saadaan siis ottamalla $\sqrt[3]{I}$ positiivisella reaaliakselilla ja $\sqrt[3]{II}$ negatiivisella reaaliakselilla ja määrittelemällä $f(0) = 0$.

Funktion raja-arvo Olkoot A ja B kompleksitason joukkoja ja $f : A \rightarrow B$ kuvaus.

Kuvauksella f on pisteessä $z_0 \in \overline{A}$ *raja-arvo* c , jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$0 < |z - z_0| < \delta \text{ ja } z \in A \Rightarrow |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Raja-arvoa varten riittää tarkastella jonoja $z_n \rightarrow z_0$, $z_n \in A \setminus \{z_0\}$. Funktiolla on raja-arvo c , jos ja vain jos kaikille tällaisille jonoille on voimassa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = c.$$

Esimerkki.

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{z}$$

on määritelty joukossa $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $0 \in \overline{A}$. Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z)?$$

Olkoon $z_n = \frac{1}{n}$. Silloin $\operatorname{Re} z_n = \frac{1}{n} = z_n$ ja $f(z_n) = \frac{\operatorname{Re} z}{z} = 1$, joten $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 1$, $\lim z_n = 0$.

Olkoon $z_n = \frac{i}{n}$. Silloin $\operatorname{Re} z_n = 0$ ja $f(z_n) = 0$, joten $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$, $\lim z_n = 0$. Raja-arvoa ei siis ole olemassa.

Funktio f on *jatkuva* pisteessä $z_0 \in A$, jos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Kuvaus f on jatkuva joukossa A , jos se on jatkuva jokaisessa A :n pisteessä. Oletetaan, että A on avoin joukko. Silloin $f : A \rightarrow B$ on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon $U \subset \mathbb{C}$ alkukuva $f^{-1}(U)$ on avoin. Funktio $f = u + iv$ on jatkuva, jos ja vain jos $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia.

Olkoon $I = [0, 1]$ yksikköväli. Polulla γ tarkoitetaan jatkuvaa kuvausta

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$$

$\gamma(0)$ polun alkupiste

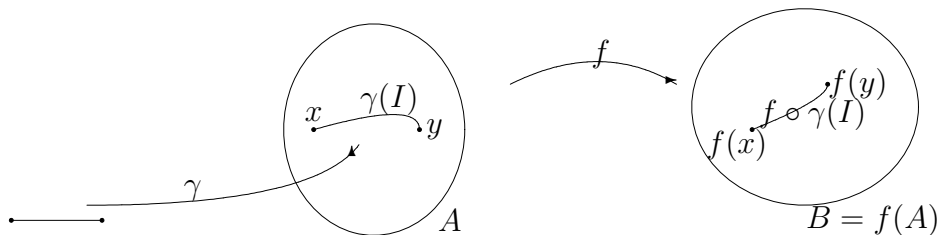
$\gamma(1)$ polun loppupiste

$\gamma(I)$ polun kantaja eli jälki.

Jos $\gamma(I) \subset A$, niin γ on joukon A polku. Pisteet $\gamma(0)$ ja $\gamma(1)$ on tällöin yhdistetty polulla γ joukossa A .

Jos A :n kaksi pistettä voidaan aina yhdistää polulla A :ssa, niin A on polkuyhtenäinen. Jos A on lisäksi avoin, niin A on *alue*. Esimerkiksi joukko $\{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ on polkuyhtenäinen, mutta se ei ole avoin. Sen sijaan esimerkiksi yksikkökierros $U(0, 1)$ on sekä avoin että polkuyhtenäinen, eli siis alue.

Polkuyhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on polkuyhtenäinen.



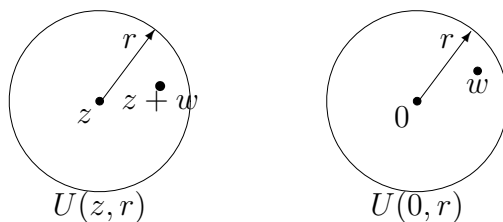
Kuva 8:

1.2 Analyyttinen funktio

Olkoon $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ kuvaus, $G \subset \mathbb{C}$. Jotta voisimme derivoida, joudumme oletamaan, että G on avoin joukko. Integrointia varten joudumme oletamaan, että G on polkuyhtenäinen. Avoimet ja yhtenäiset joukot ovat alueita. Jatkossa oletamme siis yleensä, että funktioden määrittelyjoukot ovat alueita.

Olkoon G alue ja $z \in G$. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että

$$U(r, z) = \{z + w \mid |w| < r\} \subset G.$$



Kuva 9:

Funktio

$$h(w) = \frac{f(z + w) - f(z)}{w}$$

on määritelty punkteeratussa kiekossa

$$U'(0, r) = \{w \mid 0 < |w| < r\} = U(0, r) \setminus \{0\}$$

ja 0 on $U'(0, r)$:n kasautumispiste. Edellä olleen määritelmän mukaisesti voidaan tutkia raja-arvoa

$$a = \lim_{w \rightarrow 0} h(w) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

olemassaoloa. Jos tämä raja-arvo on olemassa, niin f on *differentioituva* pisteessä z ja luku $a = f'(z)$ on f :n *derivaatta* tässä pisteessä.

Funktio, joka on differentioituva alueen G jokaisessa pisteessä, on *analyttinen* G :ssä.

Analyttisyyden määritelmä on erittäin vahva. Siitä seuraa mm., että myös f' on analyttinen, jolloin edelleen f'' on analyttinen jne. Analyttisellä funktiolla on siis kaikkien kertalukujen derivaatat.

Funktio on *analyttinen pisteessä* z , jos se on analyttinen jossakin tämän pisteen ympäristössä.

Kompleksifunktion derivaatan määrittely erotusosamäärän avulla on mahdollista, koska kompleksiluvut voidaan jakaa keskenään. Jos tarkastellaan vektorimuuttujan $x \in \mathbb{R}^n$ vektoriarvoisia funktioita $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, niin derivaatan määrittely tällä tavalla ei onnistu, kun $n \geq 3$. Tämä johtuu siitä, että lukualuetta ei voida laajentaa tasoa useampiulotteiseksi. (Hamilton ja kvaternionit 1844.)

Kirjoitetaan

$$\varepsilon(w) = \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - a.$$

Silloin

$$f(z+w) - f(z) = aw + w\varepsilon(w), \quad (1)$$

joten a on funktion f derivaatta pisteessä z , jos ja vain jos kehitemmä (1) pätee ja $\varepsilon(w) \rightarrow 0$, kun $w \rightarrow 0$. Tätä kautta kompleksinen derivaatta $a = f'(z)$ ja Analyysi4:n yleinen derivaatta (lineaarikuvauksena) liittyvät toisiinsa.

Esimerkkejä. 1. Vakiokuvaus $f(z) = c$ on analyttinen koko tasossa ja $f'(z) \equiv 0$, sillä

$$f(z+w) - f(z) = 0 \cdot w + w \cdot 0.$$

Tässä $0 = f'(z)$ ja $\varepsilon(w) \equiv 0$.

2. Identtinen kuvaus $f(z) \equiv z$ on analyttinen koko tasossa ja $f'(z) \equiv 1$, sillä

$$f(z+w) - f(z) = w = 1 \cdot w + w \cdot 0.$$

Tässä $1 = f'(z)$ ja $\varepsilon(w) \equiv 0$.

3. Funktio $f(z) = z^2$ on analyttinen koko tasossa ja $f'(z) = 2z$, sillä

$$f(z+w) - f(z) = (z+w)^2 - z^2 = z^2 + 2zw + w^2 - z^2 = 2z \cdot w + w \cdot w.$$

Tässä $f'(z) = 2z$ ja $\varepsilon(w) = w \rightarrow 0$, kun $w \rightarrow 0$.

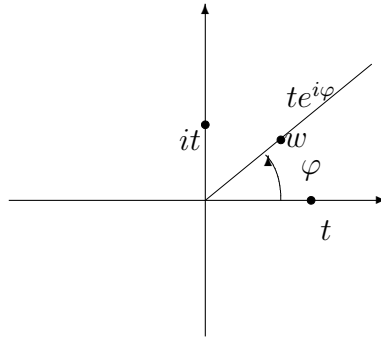
4. Funktiolla $f(z) = \bar{z}$ ei ole derivaattaa missään pisteessä $z \in \mathbb{C}$.

Todistus. Tarkastellaan erotusosamäärää

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} = \frac{\bar{z} + \bar{w} - \bar{z}}{w} = \frac{\bar{w}}{w}$$

säteillä

$$\begin{cases} w = t & , t > 0 \\ w = it & , t > 0 \end{cases}$$



Kuva 10:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} &= 1, \text{ kun } w = t > 0 \\ \frac{f(z+w) - f(z)}{w} &= \frac{-it}{it} = -1, \text{ kun } w = it, t > 0. \end{aligned}$$

Annetaan $t \rightarrow 0+$. Erotusosamäärällä on eri raja-arvot (1 ja -1) näillä säteillä, joten sillä ei ole raja-arvoa kompleksitason topologiassa. On mielenkiintoista huomata, että erotusosamäärällä on raja-arvo jokaisella origosta lähtevällä w -tason säteellä $w = te^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} &= \frac{\bar{w}}{w} = \frac{te^{-i\varphi}}{te^{i\varphi}} \\ &= e^{-2i\varphi} = \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Jokaisella origon kautta kulkevalla suoralla saadaan eri raja-arvo.

Kehitelmän (1) avulla voidaan tavalliseen tapaan perustella summan, tulon, osamäärän, käänteisfunktion ja yhdistetyn funktion derivointikaavat kompleksifunktioille. Esimerkiksi, jos

$$\begin{aligned}f_1(z+w) - f_1(z) &= a_1w + w\varepsilon_1(w), \\f_2(z+w) - f_2(z) &= a_2w + w\varepsilon_2(w),\end{aligned}$$

niin

$$(f_1 + f_2)(z+w) - (f_1 + f_2)(z) = (a_1 + a_2)w + w(\varepsilon_1(w) + \varepsilon_2(w)),$$

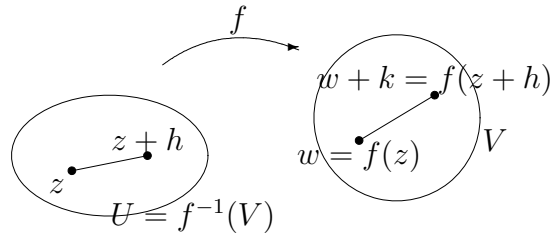
joten

$$(f_1 + f_2)'(z) = f_1'(z) + f_2'(z).$$

Käänteisfunktion derivaatta: Oletetaan, että funktiolla f on pisteessä z derivaatta $f'(z) \neq 0$ ja että käänteisfunktio f^{-1} on määritelty ja jatkuva eräässä pisteen $w = f(z)$ ympäristössä V . Silloin f^{-1} on differentioituva pisteessä w ja

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

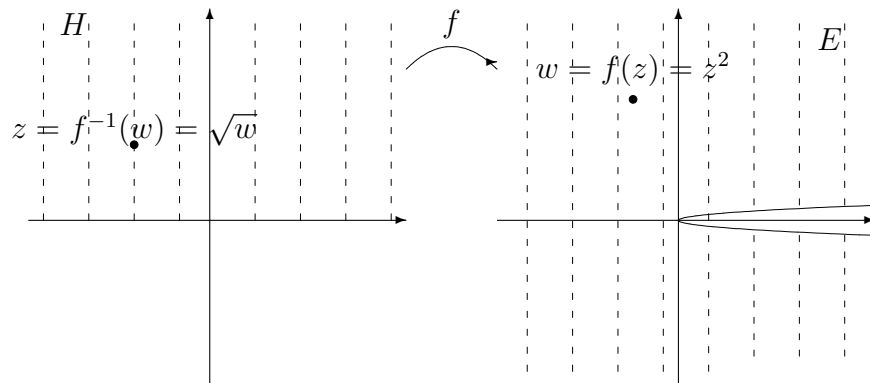
Todistus. (Huomaa merkinnän muuttuminen. Nyt on $w = f(z)$. Merkitään siksi z :n lisäystä h :lla.)



Kuva 11:

f :n jatkuvuuden nojalla $k \rightarrow 0$, kun $h \rightarrow 0$, $f : U \rightarrow V$ jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus $f^{-1} : V \rightarrow U$ on jatkuva ja f^{-1} :n jatkuvuuden nojalla $h \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow 0$. Jos $w+k \in V$, $k \neq 0$, niin merkitään $f^{-1}(w+k) = z+h$. Silloin $h \neq 0$ ja

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(w+k) - f^{-1}(w)}{k} &= \frac{z+h - z}{f(z+h) - f(z)} = \frac{h}{f'(z)h + h\varepsilon(h)} \\&= \frac{1}{f'(z) + \varepsilon(h)} \rightarrow \frac{1}{f'(z)}, \text{ kun } k \rightarrow 0.\end{aligned}$$



Kuva 12:

Esimerkki. Funktio $f(z) = z^2$

on injektio ylemmässä puolitasossa $H = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$ ja $E = f(H)$ on pitkin positiivista reaaliakselia aukileikattu taso $\mathbb{C} \setminus [0, \infty[$. Neliöjuuri voidaan määritellä kuvauksena $f^{-1} : E \rightarrow H$. Merkitään

$$f^{-1}(w) = \sqrt{w}.$$

Osoitetaan, että f^{-1} on jatkuva E :ssä. Olkoon $w_1, w_2 \in E$ ja

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 = \sqrt{w_1} \\ z_2 &= x_2 + iy_2 = \sqrt{w_2}, \end{aligned}$$

jolloin $y_1 > 0$ ja $y_2 > 0$. Saadaan arvio

$$\begin{aligned} |w_2 - w_1| &= |z_2^2 - z_1^2| = |z_2 - z_1||z_1 + z_2| = |z_2 - z_1|\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2} \\ &\geq |z_2 - z_1|(y_1 + y_2) > y_1|z_2 - z_1|, \end{aligned}$$

mistä saadaan

$$|z_2 - z_1| < \frac{|w_2 - w_1|}{y_1}.$$

Pidetään w_1 (ja siis myös y_1) vakiona ja annetaan $w_2 \rightarrow w_1$. Silloin $|w_2 - w_1| \rightarrow 0$, joten myös

$$|z_2 - z_1| = |\sqrt{w_2} - \sqrt{w_1}| \rightarrow 0.$$

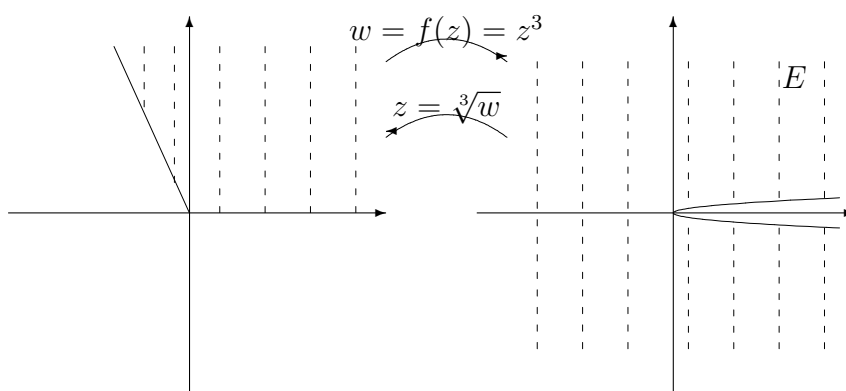
Näin ollen $\sqrt{w}$ on jatkuva pisteessä w_1 . Koska w_1 (ja w_2) valittiin mielivaltaisesti E :stä, on $\sqrt{w}$ jatkuva E :ssä.

Käänteisfunktion derivaattaa koskevasta tuloksesta seuraa, että $\sqrt{w}$ on derivoituva E :ssä ja sen derivatta on

$$\frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(\sqrt{w})} = \frac{1}{2\sqrt{w}},$$

sillä $f(z) = z^2$ ja $f'(z) = 2z$.

Vastaavalla tavalla nähdään, että



Kuva 13:

kuutiojuuri on jatkuva E :ssä ja sen derivaatta on

$$\frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(\sqrt[3]{w})} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{w})^2}.$$

Tulos yleistyy n :teen juureen $\sqrt[n]{w}$.

Cauchy-Riemannin -yhtälöt

Olkoon $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ kuvaus ja $z \in A$ joukon A sisäpiste. Oletetaan, että f on differentioituva pisteessä $z = x + iy$, jolloin

$$f(z + w) - f(z) = a \cdot w + w \cdot \varepsilon(w), \quad (2)$$

missä $\varepsilon(w) \rightarrow 0$, kun $w \rightarrow 0$. Hajotetaan kaikki termit reaali- ja imaginaariosiinsa:

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ a &= \alpha + i\beta \\ w &= h + ik \\ \varepsilon(w) &= \varepsilon_1(w) + i\varepsilon_2(w). \end{aligned}$$

Yhtälö (2) hajoaa tällöin kahdeksi reaaliseksi yhtälöksi:

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x, y) &= \alpha h - \beta k + h\varepsilon_1(w) - k\varepsilon_2(w) \\ v(x+h, y+k) - v(x, y) &= \beta h + \alpha k + k\varepsilon_1(w) + h\varepsilon_2(w). \end{aligned}$$

Koska

$$\begin{aligned} |h\varepsilon_1(w) - k\varepsilon_2(w)|^2 &= |(h, k) \cdot (\varepsilon_1(w), \varepsilon_2(w))|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarzin ey.}}{\leq} \|(h, -k)\|^2 \|(\varepsilon_1(w), \varepsilon_2(w))\|^2 = (h^2 + k^2)(\varepsilon_1(w)^2 + \varepsilon_2(w)^2), \end{aligned}$$

on

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{h\varepsilon_1(w) - k\varepsilon_2(w)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Näin ollen funktio $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ on (Analyysi3:n ja Analyysi4:n mielessä) differentioituva pisteessä $z = (x, y)$ ja

$$\begin{aligned} D_1 u &= u_x = \alpha, \\ D_2 u &= u_y = -\beta. \end{aligned}$$

Samalla perusteella $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $z = (x, y)$ ja

$$\begin{aligned} D_1 v &= v_x = \beta, \\ D_2 v &= v_y = \alpha. \end{aligned}$$

Funktiot u ja v toteuttavat siis ns. *Cauchy-Riemannin differentiaaliyhtälöt*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases} \quad (3)$$

Oletetaan kääntäen, että funktiot $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ ovat differentioituvia joukon A sisäpisteessä $z = (x, y)$ ja toteuttavat tässä pisteessä Cauchy-Riemannin differentiaaliyhtälöt (3). Muodostetaan funktio $f = u + iv : A \rightarrow \mathbb{C}$.

Väitös: f on differentioituva pisteessä z ja $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - u_y(x, y)$.

Todistus: Differentioituvuuden määritelmän perusteella u :lla ja v :llä on kehitelmät

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x, y) &= u_x(x, y)h + u_y(x, y)k + |w|\varepsilon_1(w) \\ v(x+h, y+k) - v(x, y) &= v_x(x, y)h + v_y(x, y)k + |w|\varepsilon_2(w), \end{aligned}$$

missä $w = h + ik$ ja $\varepsilon_j \rightarrow 0$, kun $w \rightarrow 0$, $j = 1, 2, \dots$. Yhtälöiden (3) nojalla on

$$\begin{aligned}
 f(z+w) - f(z) &= u_x h + u_y k + i v_x h + i v_y k + |w| \varepsilon_1(w) + i |w| \varepsilon_2(w) \\
 &= u_x h + i v_y k + i(v_x h - i u_y k) + |w| \varepsilon_1(w) + i |w| \varepsilon_2(w) \\
 &= u_x h + i u_x k + i(v_x h + i v_x k) + |w|(\varepsilon_1(w) + i \varepsilon_2(w)) \\
 &= u_x(h + ik) + i v_x(h + ik) + |w|(\varepsilon_1(w) + i \varepsilon_2(w)) \\
 &= (u_x + i v_x)w + w \frac{|w|}{w}(\varepsilon_1(w) + i \varepsilon_2(w)).
 \end{aligned}$$

Merkitään

$$\begin{aligned}
 a &= u_x(x, y) + i v_x(x, y) \\
 \varepsilon(w) &= \frac{|w|}{w}(\varepsilon_1(w) + i \varepsilon_2(w)).
 \end{aligned}$$

Silloin

$$f(z+w) - f(z) = aw + w\varepsilon(w),$$

missä $\varepsilon(w) \rightarrow 0$, kun $w \rightarrow 0$.

On siis todistettu

Lause 1 *Funktio $f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen alueessa G , jos ja vain jos funktiot $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ ja $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ ovat G :ssä differentioituvia ja toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt (3).*

Oletetaan, että olemme unohtaneet Cauchy-Riemannin yhtälöt. Miten ne voidaan palauttaa mieleen?

Oletetaan, että derivaatta

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

on olemassa pisteessä $z \in G$. Valitaan w :lle sopivia teitä lähestyä nollaa, $w = h + ik = (h, k)$, $z = x + iy = (x, y)$:

1) w menee reaalisena kohti nollaa. Merkitään $w = h = (h, 0)$

$$\begin{aligned}
 \frac{f(z+w) - f(z)}{w} &= \frac{u(x+h, y) + i v(x+h, y) - u(x, y) - i v(x, y)}{h} \\
 &= \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \\
 &\rightarrow u_x(x, y) + i v_x(x, y) = f'(z).
 \end{aligned}$$

2) w menee puhtaasti imaginaarisena kohti nollaa. Merkitään $w = ik = (0, k)$.

$$\begin{aligned}\frac{f(z+w) - f(z)}{w} &= \frac{u(x, y+k) + iv(x, y+k) - u(x, y) - iv(x, y)}{ik} \\ &= -i \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} + \frac{i(v(x, y+k) - v(x, y))}{ik} \\ &\rightarrow -iu_y(x, y) + v_y(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y) = f'(z).\end{aligned}$$

Oletetaan, että $f'(z)$ on olemassa. Kohdassa 1 on f :n osittaisderivaatta x :n suhteen:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Kohdassa 2 on f :n osittaisderivaatta y :n suhteen vakiolla kerrottuna:

$$\begin{aligned}f_y(x, y) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i(f(z+ik) - f(z))}{ik} \\ &= i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{k} = if'(z).\end{aligned}$$

Siis $f_x(x, y) = \frac{1}{i}f_y(x, y) = -if_y(x, y)$. Saadaan Cauchy-Riemannin yhtälöiden kompleksimuoto

$$f_x = -if_y.$$