

4 Alkeisfunktioita

4.1 Eksponenttifunktio

Eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on määritelty kehitelmällä

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pyrimme laajentamaan määritelmän koko tasoon $\mathbb{C}$ siten, että

1° $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen ja

2° $\exp(x) = e^x$, kun $x \in \mathbb{R}$.

Itse asiassa tiedämme jo vastauksen Eulerin kaavasta:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Asetetaan

$$\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y \end{cases}$$

ja määritellään ($z = x + iy$)

$$e^z = u + iv = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (11)$$

Funktio $\exp(z) = e^z$ toteuttaa ehdon 2°, sillä jos $y = 0$, on $z = x \in \mathbb{R}$ ja

$$e^x = e^x (\cos 0 + i \sin 0).$$

Ehdon 1° todistaminen on helppoa edellisen lauseen avulla: Funktiot u ja v ovat differentioituvia koko tasossa ja

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos y, \\ u_y(x, y) &= -e^x \sin y, \\ v_x(x, y) &= e^x \sin y, \\ v_y(x, y) &= e^x \cos y, \end{aligned}$$

joten $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$ eli Cauchy-Riemannin yhtälöt toteutuvat. Kaavalla (11) määritelty funktio

$$\exp(z) = e^z$$

on siis analyyttinen koko tasossa.

Voidaan osoittaa, että jos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on jokin analyyttinen funktio, jolle

$$f(x) = e^x, \text{ kaikille } x \in \mathbb{R},$$

niin, $f(z) = e^z$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Ehdot 1° ja 2° määräävät siis funktion $\exp$ yksikäsitteisesti.

Eksponenttifunktion ominaisuuksia

1. Derivoimiskaava: Edellä osoitettiin, että

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y).$$

Näin ollen

$$\exp'(z) = e^x \cos y + ie \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = \exp(z).$$

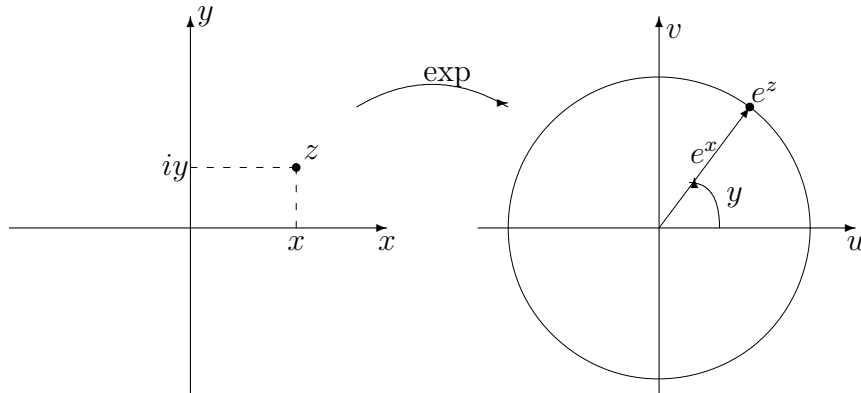
Tuttu derivoimiskaava pätee siis koko tasossa $\mathbb{C}$.

2. Eulerin kaava $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ on e^z :n määritelmän erikoistapaus (valitaan $z = i\varphi$).

3. Määritelmä $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$e^z = e^x e^{iy},$$

joten $|e^z| = e^x$ ja $\arg e^z = y$.



Kuva 38:

Kun z liikkuu pitkin y -akselin suuntaista suoraa, e^z kiertää pitkin origokeskeistä ympyrää, jonka säde on e^x .

4. Yhteenlaskukaava:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

5. Kompleksialueessa ilmenee uusi ominaisuus: Eksponenttifunktio on jaksollinen ja sen jakso on $2\pi i$:

$$\exp(z + n2\pi i) = \exp(z) \exp(n2\pi i) = \exp(z).$$

Joukko $\{z | 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ on $\exp$:n *jaksovyö*.

Lause 3 $\exp$ saa jaksovyössä kaikki kompleksiarvot täsmälleen kerran, lukuunottamatta arvoa 0, jota se ei saa lainkaan.

Todistus. Olkoon $w = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Silloin

$$\begin{aligned} e^z &= re^{i\varphi} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = r \\ e^{iy} = e^{i\varphi} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln r \\ y = \varphi + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Piste $x + iy$ on jaksovyössä, jos ja vain jos $n = 0$. Arvo $w \neq 0$ saavutetaan jaksovyössä siis täsmälleen kerran. Koska $|e^z| = e^x > 0$, ei $\exp$ saa arvoa 0 millään $z \in \mathbb{C}$.

$\exp(z)$:lla ei ole raja-arvoja 0 eikä ∞ , kun $z \rightarrow \infty$. Kumpaakaan näistä kahdesta arvosta $\exp(z)$ ei siis saa edes ∞ :ssä.

Määritelmä 1 Olkoot G ja G' alueita. Analyttistä bijektiota $f : G \rightarrow G'$ kutsutaan konformikuvaukseksi.

Kompleksianalyysin (=funktio-teorian) keskeisiä perustehtäviä on ollut kuvata annettu alue G konformisesti toiselle annetulle alueelle G' . Tämä ei suinkaan ole aina mahdollista, jos alueet G ja G' eivät ole riittävän samansukuisia.

Esimerkki. Olkoon $G = \{z \in \mathbb{C} | 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ ja $G' = \{w \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} w > 0\}$. Yritetään muodostaa konformikuvaus $f : G \rightarrow G'$.

Eksponenttifunktio kuvaa vaakasuoran viipaleen sektoriksi. Jos viipaleen leveys on π , niin sektori on puolitaso.

Vaiheet:

1. Kierretään G vaakasuoraksi
2. Levennetään G π :n levyiseksi
3. Kuvataan $\exp$:llä puolitasolle

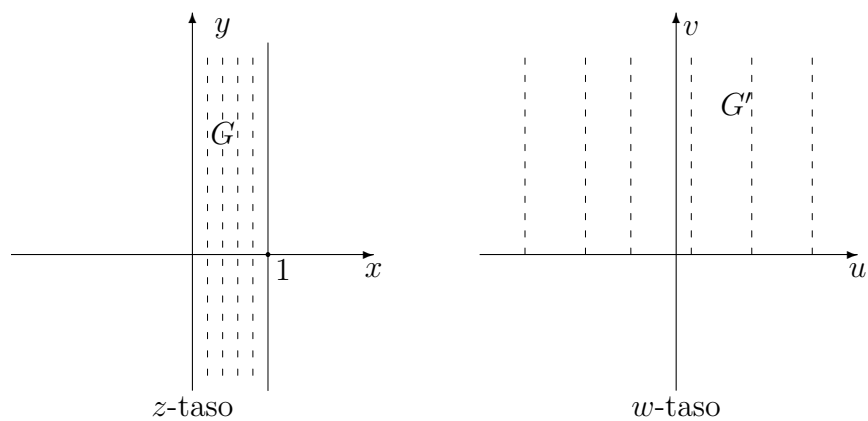
Haettu konformikuvaus $f : G \rightarrow G'$ on siis

$$f(z) = e^{\pi iz}.$$

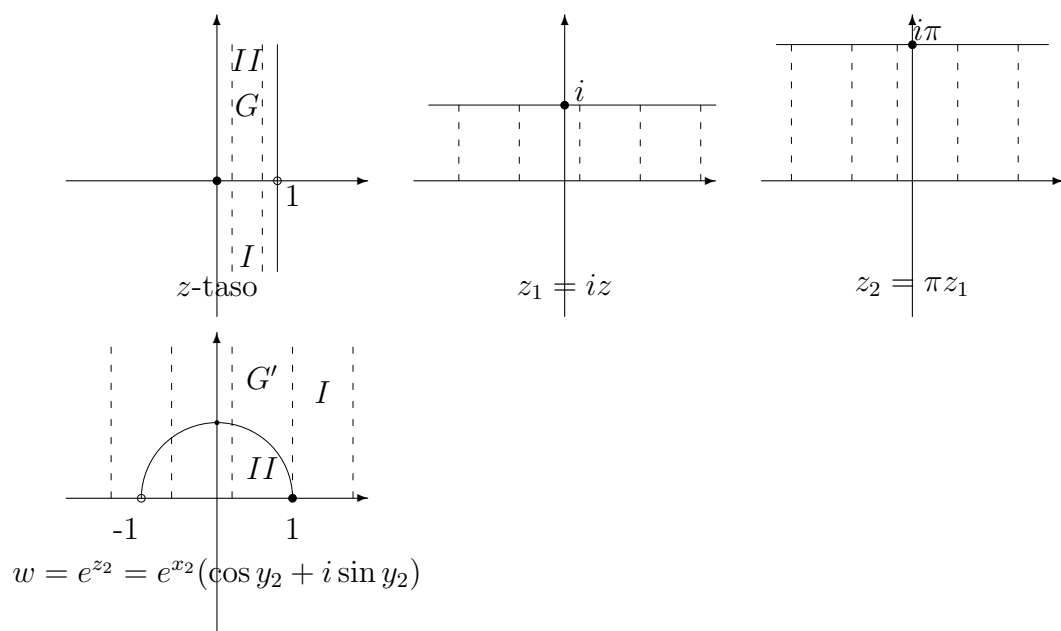
Kokeillaan reunapisteillä:

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad f(0) = e^0 = 1 \\ z = 1 & \quad f(1) = e^{i\pi} = -1. \end{aligned}$$

Jana $[0, 1]$ kuvautuu pisteitä 1 ja -1 yhdistäväksi puoliympyräksi.



Kuva 39:



Kuva 40:

Kokeillaan sisäpisteellä:

$$z = \frac{1}{2} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Janan $[0, 1]$ keskipiste kuvautuu puoliympyrän puoliväliin.

Olkoon $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{i\pi z} = e^{i\pi(x+iy)} = e^{-\pi y + i\pi x} \\ |f(z)| &= e^{-\pi y} \end{aligned}$$

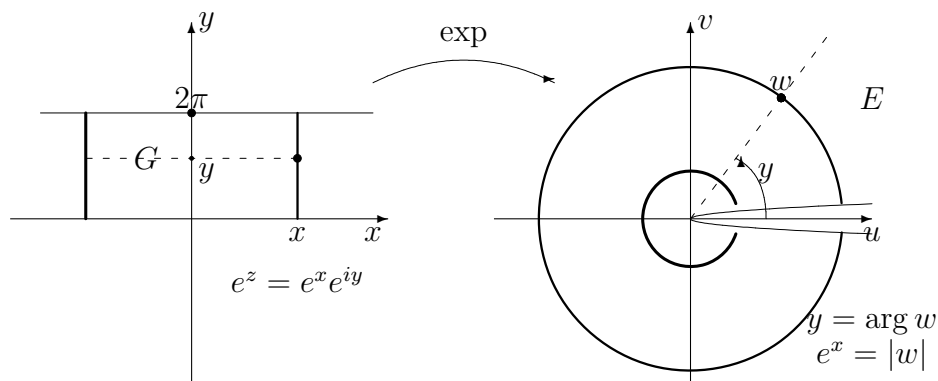
Jos $y < 0$, niin $e^{-\pi y} > 1$.

Jos $y = 0$, niin $e^{-\pi y} = 1$.

Jos $y > 0$, niin $e^{-\pi y} < 1$.

Siis alueen G ne pisteet, jotka ovat x -akselin alapuolella, kuvautuvat G' :n pisteille, jotka ovat yksikköympyrän ulkopuolella. Vastaavasti x -akselin yläpuolella olevat G :n pisteet kuvautuvat yksikköympyrän sisäpuolella oleville G' :n pisteille.

4.2 Logaritmifunktio



Kuva 41:

$\exp$ on injektio alueessa $G = \{z | 0 < \text{Im } z < 2\pi\}$. Tämän alueen kuva on pitkin positiivista reaaliakselia aukileikattu taso E . Käänteiskuvausta $\exp^{-1} : E \rightarrow G$ kutsutaan logaritmifunktion *päähaaraksi* ja sillä on lauseke

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w, \quad 0 \leq \arg w < 2\pi,$$

sillä

$$e^{\ln w} = e^{\ln |w|} e^{i \arg w} = |w| (\cos(\arg w) + i \sin(\arg w)) = w.$$

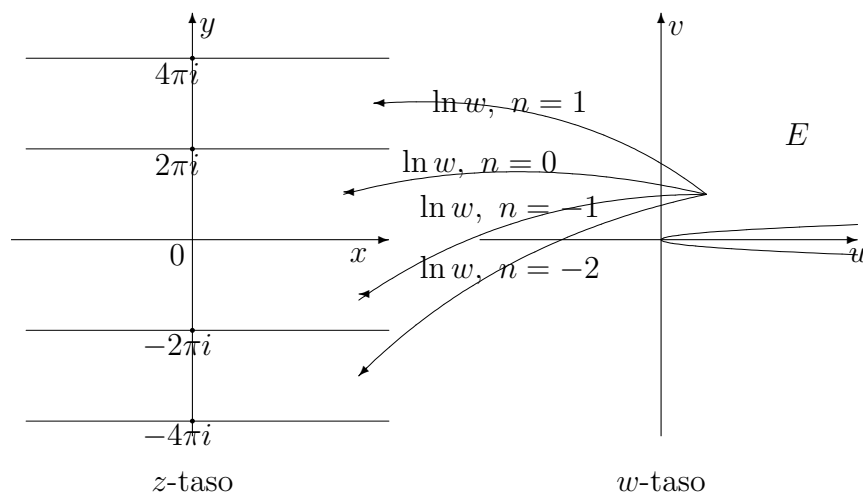
Koska $\ln w$ on jatkuva E :ssä, on

$$\frac{d}{dw} \ln w = \frac{1}{\left(\frac{d}{dz} e^z\right)_{z=\ln w}} = \frac{1}{w}.$$

Yleisemmin on e^z :n rajoittuma jokaiseen alueeseen $n2\pi < \operatorname{Im} z < (n+1)2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, injektio ja jaksollisuuden takia on kuva-alue aina sama kuin arvolla $n = 0$ eli E . Käänteisfunktioilla on E :ssä lauseke

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w + n2\pi i, \quad 0 \leq \arg w < 2\pi$$

jokaisella arvolla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.



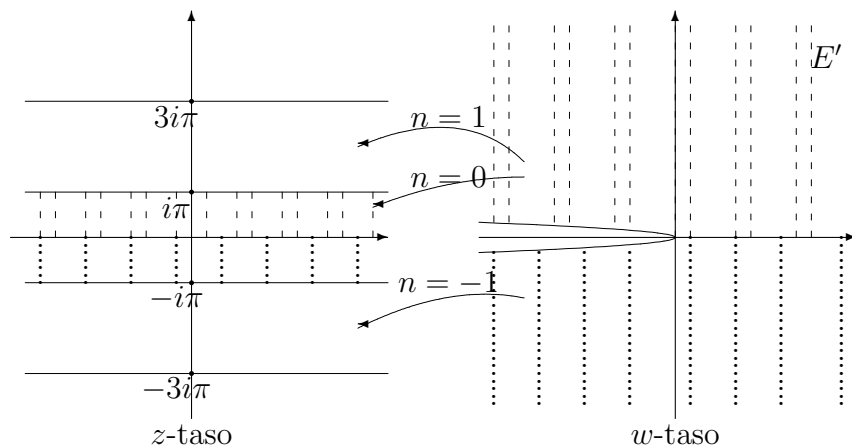
Kuva 42:

Logaritmilla on E :ssä äärettömän monta haaraa.

Positiivinen reaaliakseli ei kuulu E :hen. Jos positiivinen reaaliakseli halutaan mukaan logaritmin määrittelyalueeseen, leikataan w -taso auki (esimerkiksi) pitkin negatiivista reaaliakselia.

$$\begin{aligned} \ln w &= \begin{cases} \ln w + i \arg w, & \operatorname{Im} w \geq 0 \\ \ln w + i \arg w - 2\pi i, & \operatorname{Im} w < 0 \end{cases} \\ 0 &\leq \arg w < 2\pi \end{aligned}$$

Eri haarat saadaan tästä lisäämällä $n2\pi i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Kuva 43:

Logaritmille on voimassa sääntö

$$\ln(z_1 + z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

vain $n2\pi i$:n tarkkuudella.

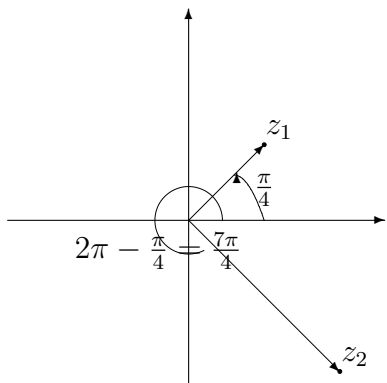
Esimerkkejä 1. Olkoon $\ln z$ logaritmin päähaara.

$$\begin{aligned} z_1 &= -1 & \ln z_1 &= \ln |-1| + i \arg(-1) = i\pi \\ z_2 &= -i & \ln z_2 &= \ln |-i| + i \arg(-i) = i\frac{3\pi}{2} \\ z_1 z_2 &= i & \ln z_1 z_2 &= i\frac{\pi}{2} = \ln z_1 + \ln z_2 + 2\pi i \end{aligned}$$

2. Olkoon $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$ logaritmin päähaara ja $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 2i$.

Silloin

$$\begin{aligned} \ln z_1 &= \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \\ \ln z_2 &= \ln 2\sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4} \\ z_1 z_2 &= 2 + 2 + 2i - 2i = 4 \\ \ln z_1 + \ln z_2 &= \ln \sqrt{2} + \ln 2\sqrt{2} + i\frac{8\pi}{4} = \ln 4 + 2\pi i \\ \ln z_1 z_2 &= \ln 4. \end{aligned}$$



Kuva 44:

Kuva 45:

3. Yhtälön $e^z = 3 - 4i$ ratkaiseminen.

$$\begin{aligned} z &= \ln(3 - 4i) \\ |3 - 4i| &= \sqrt{9 + 16} = 5 \\ \arg(3 - 4i) &= \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + n2\pi i \end{aligned}$$

4.3 Trigonometriset funktiot

Eulerin kaavan mukaan

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y, \\ e^{-iy} &= \cos y - i \sin y, \end{aligned}$$

joten reaalilla arvoilla y on

$$\begin{cases} \cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) \\ \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}) \end{cases}$$

Näin ollen meillä on täsmälleen yksi mahdollisuus määritellä $\sin z$ ja $\cos z$ koko tasossa analyyttisinä funktioina.

Määritelmä 2

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.\end{aligned}$$

Siis

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ ja } \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Määritelmästä seuraa, että $\sin z$ ja $\cos z$ ovat koko tasossa analyyttisiä funktioita ja niiden derivaatat ovat

$$\begin{aligned}D(\cos z) &= \frac{1}{2} (ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{-1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z \\ D(\sin z) &= \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z.\end{aligned}$$

Peruskaavoja.

1.

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \frac{1}{2} (e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}) \\ \cos z_1 \cos z_2 &= \frac{1}{2} (e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \frac{1}{2} (e^{iz_2} + e^{-iz_2}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2} + e^{iz_1}e^{-iz_2} + e^{-iz_1}e^{iz_2}) \\ \sin z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{2i} (e^{iz_1} - e^{-iz_1}) \frac{1}{2i} (e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \\ &= -\frac{1}{4} (e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2} - e^{iz_1}e^{-iz_2} - e^{-iz_1}e^{iz_2})\end{aligned}$$

Siis

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp (\sin z_1 \sin z_2).$$

Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2.$$

2.

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Todistus.

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \frac{1}{4} (e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4} (e^{iz} - e^{-iz})^2 \\ &= \frac{1}{4} 2e^{iz} e^{-iz} + \frac{1}{4} 2e^{iz} e^{-iz} = 1.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cos z + \sin \frac{\pi}{2} \sin z \\ &= \sin z.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\cos(-z) &= \cos z \\ \sin(-z) &= -\sin z\end{aligned}$$

5. Funktioilla $\cos z$ ja $\sin z$ on ainoastaan jaksot $n2\pi$.

Todistus. exp:llä on jaksot $n2\pi i$, joten sinillä ja kosinilla on jaksoina $n2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Osoitamme, että muita jaksoja ei ole. Tarkastellaan funktiota $\sin z$.

a)

$$\begin{aligned}\sin z = 0 &\Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = e^{n2\pi i} \Leftrightarrow 2iz = n2\pi i \\ &\Leftrightarrow z = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

b) Jos $w \in \mathbb{C}$ on jakso, niin

$$\sin(z + w) = \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Valitaan $z = 0$:

$$\sin w = \sin 0 = 0 \tag{12}$$

Valitaan $z = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\sin\left(w + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \sin\left(w + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - w - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(-w) = \cos w.\end{aligned}$$

$$\text{Siis } \cos w = 1. \tag{13}$$

$$(12) \Rightarrow w = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(13) \Rightarrow n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$$

4.4 Kuvaus $z \mapsto \cos z$

Funktioilla e^z ja e^{-z} on jaksovyönä

$$\left\{ z \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi \right\}.$$

Näin ollen $\cos z$ saa joukossa $A = \left\{ z \mid -\pi < \operatorname{Re} z \leq \pi \right\}$ kaikki mahdolliset arvonsa. Tutkitaan, miten $\cos z$ kuvaa joukon A .

Tarkastellaan yhtälöä

$$\cos z = w. \quad (14)$$

Sijoitetaan $e^{iz} = t$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} &= \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2 + 1}{2t} = w \\ \Leftrightarrow t^2 - 2tw + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2tw + w^2 &= w^2 - 1 \\ \Leftrightarrow (t - w)^2 &= w^2 - 1 \\ \text{a) } w &= \pm 1 \\ (t \mp 1)^2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = \pi \end{cases} \\ \text{b) } w &\neq \pm 1 \\ t &= \pm \sqrt{w^2 - 1} + w \end{aligned}$$

Neliöjuuren kaksi eri haaraa antavat kaksi eri t :n arvoa $t_1 \neq 0$ ja $t_2 \neq 0$.

Yhtälöllä (14) on vastaavasti juuret $z_1 \in A$ ja $z_2 \in A$, joille $e^{iz_1} = t_1$ ja $e^{iz_2} = t_2$. Koska $t_1 t_2 = w^2 - (w^2 - 1) = 1$, on $e^{i(z_1 + z_2)} = 1$ ja $z_1 + z_2 = n2\pi \Leftrightarrow z_2 = -z_1 + n2\pi$. Yleensä on $n = 0$, jolloin $z_2 = -z_1 \in A$. Jos $\operatorname{Re} z_1 = \pi$, niin $z_2 = -z_1 + 2\pi \in A$. Funktio $\cos z$ saa siis kaikki arvot $w \neq \pm 1$ täsmälleen kaksi kertaa joukossa A . Arvot $w = 1$ ja $w = -1$ kosini saa pisteissä $z = 0$ ja $z = \pi$.

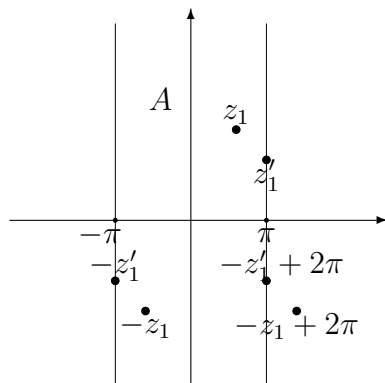
Koska

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \end{aligned}$$

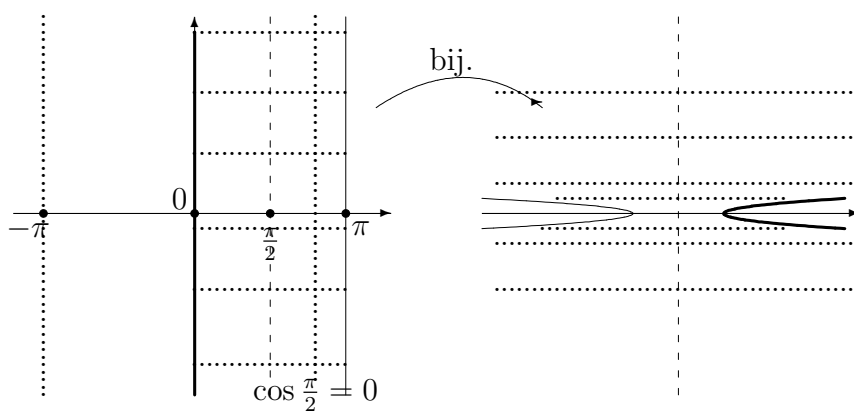
on $\cos z$ reaalinen suorilla $y = 0$ ja $x = n\pi$. Tästä seuraa

Esimerkki. Ratkaise yhtälöt

a) $\sin z = 1$



Kuva 46:



Kuva 47:

- b) $\cos z = 2i$
c) $\sin z = 100$
a)

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = 1 \\ \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} &= 2i \\ \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2ie^{iz} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{iz} &= i \pm \sqrt{-1+1} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow iz &= i\frac{\pi}{2} + n2\pi i \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n2\pi$$

b)

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = 2i \\ \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} - 4i &= 0 \\ \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 4ie^{iz} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{iz} = 2i \pm \sqrt{-4-1} &= 2i \pm i\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^{iz} = (2 + \sqrt{5})i \\ e^{iz} = (\sqrt{5} - 2)(-i) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y}e^{ix} = (2 + \sqrt{5})e^{i\frac{\pi}{2}} \\ e^{-y}e^{ix} = (\sqrt{5} - 2)e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + n2\pi \\ y_1 = -\ln(\sqrt{5} + 2) \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \\ y_2 = -\ln(\sqrt{5} - 2) \end{cases} \end{cases}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = 100 \\ \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 200ie^{iz} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{iz} = 100i \pm \sqrt{-10000 + 1} &= i(100 \pm \sqrt{9999}) \\ \Leftrightarrow e^{-y}e^{ix} = (100 \pm \sqrt{9999})e^{i\pi} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + n2\pi \\ y = -\ln(100 \pm \sqrt{9999}) \end{cases}\end{aligned}$$

Mitä on $\sin i$ ja $\cos i$?

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \\ \sin i &= \frac{1}{2i} (e^{-1} - e^1) = -i \frac{e - e^{-1}}{2} = i \frac{e^2 - 1}{2e}\end{aligned}$$

Toinen tapa:

$$\begin{aligned}\sin iy &= i \sinh y \\ \sin i &= i \sinh 1 = i \frac{1}{2} (e^1 - e^{-1})\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\cos iy = \cosh y$$

$$\cos i = \cosh 1 = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right)$$