Algebra
Syksy 2009
Kertausta 1. välikokeeseen

1. Osoita, että jos $a \equiv b \pmod{2n}$, niin $a^2 \equiv b^2 \pmod{4n}$.

2. Osoita, että jos p on alkuluku ja $p \mid a^n$, niin $p^n \mid a^n$.

3. Ratkaise lineaariset kongruenssit (ilmoita vastaukset pienimmän ei-negatiivisen jäännöksen avulla)

   a) $3x \equiv 6 \pmod{8}$,

   b) $128x \equiv 833 \pmod{1001}$,

   c) $58x \equiv 2 \pmod{32}$.

4. Muodostaako pari $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, *)$ ryhmän, jos
$$a * b = |a|\, b,$$
missä $|a|$ on luvun a itseisarvo?

5. Osoita, että yhden alkion sisältävä joukko voi muodostaa laskutoimituksen kanssa ryhmän.

6. Olkoot $(G_1, \circ)$ ja $(G_2, *)$ ryhmiä ja $e_2 \in G_2$ neutraalialkio. Osoita, että kuvaus $f : G_1 \to G_2$, $f(x) = e_2$ on homomorfismi.

7. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, on homomorfismi ryhmältä $(\mathbb{R}, +)$ ryhmälle $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

8. Näytä, että kuvaus $g : \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_3$, $g([x]_{18}) = [2x]_3$, on homomorfismi ja etsi ko. kuvauksen ydin.

9. Tutki, onko kuvaus $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ isomorfismi ryhmältä $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ itselleen, kun

   a) $f(x) = 3x$,

   b) $f(x) = \sqrt{x}$.