

Algebra
Syksy 2009
Kertausta 2

- Määritä osajoukon $S = \{8, 10\}$ virittämä ryhmän $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$ aliryhmä $\langle S \rangle$.
- Olkoon (G, \circ) ryhmä ja $H := \{a \in G \mid a \circ x = x \circ a \text{ kaikilla } x \in G\}$. Osoita, että (H, \circ) on ryhmän (G, \circ) **normaali** aliryhmä.
- Määritä ryhmän $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ aliryhmät ja vastaavat tekijäryhmät lasku-
taulukoineen.
- Etsi kaikki nollantekijät renkaassa \mathbb{Z}_{14} .
- Etsi kaikki ratkaisut yhtälölle
 - $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ renkaassa \mathbb{Z}_{12} ,
 - $x^2 + 2x + 2 = 0$ renkaassa \mathbb{Z}_6 .
- Olkoon $F = \{0, e, a, b\}$. Alla olevat taulukot määrittelevät joukon F laskutoimitukset. Osoita, että F on kunta, kun tiedetään, että lasku-
toimitukset ovat liitännäiset ja osittelulait ovat voimassa.

$+$	0	e	a	b	\cdot	0	e	a	b
0	0	e	a	b	0	0	0	0	0
e	e	0	b	a	e	0	e	a	b
a	a	b	0	e	a	0	a	b	e
b	b	a	e	0	b	0	b	e	a

- Olkoon $(R, +, \cdot)$ vaihdannainen ykkösellinen rengas, $a \in R$, sekä $(I, +, \cdot)$ renkaan R ideaali. Näytä, että kolmikko

$$(\{i + ar \mid i \in I, r \in R\}, +, \cdot)$$

on renkaan R ideaali.

- Tutki ovatko renkaat \mathbb{Z}_9 ja $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ isomorfiset.
- Laske $f(x) + g(x)$ ja $f(x)g(x)$ polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_8[x]$, kun $f(x) = 4x - 5$ ja $g(x) = 2x^2 - 4x + 2$.
- Tutki ovatko seuraavat polynomit jaottomia annetussa renkaassa:
 - $2x^3 + x^2 + 2x + 2$ renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$,
 - $x^3 - 9$ renkaassa $\mathbb{Z}_{11}[x]$.