Algebra
Syksy 2009
Kertausta 2

1. Määritä osajoukon $S = \{8, 10\}$ virittämä ryhmän $(\mathbb{Z}_{18}, +_{18})$ aliryhmä $\langle S \rangle$.

   Ratkaisu. Lukujen 8 ja 10 suurin yhteinen tekijä on 2. Nyt
   $$\langle S \rangle = \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}.$$

2. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja $H := \{a \in G \mid a \circ x = x \circ a \text{ kaikilla } x \in G\}$. Osoita, että $(H, \circ)$ on ryhmän $(G, \circ)$ **normaali** aliryhmä.

   Todistus.

   1. $e \in H$, sillä $e \circ x = x \circ e \quad \forall\ x \in G$.
   2. Olkoot $a, b \in H$. Tällöin $a \circ x = x \circ a$ ja $b \circ x = x \circ b, \forall x \in G$. Tällöin
      $$(a \circ b) \circ x = a \circ (b \circ x) = a \circ (x \circ b) = (a \circ x) \circ b = x \circ (a \circ b),$$
      joten $a \circ b \in H$.
   3. Olkoon $a \in H$, siis $a \circ x = x \circ a, \forall\ x \in G$. Nyt
      $$\begin{aligned} a \circ x &= x \circ a \\ \Leftrightarrow a^{-1} \circ a \circ x &= a^{-1} \circ x \circ a \\ \Leftrightarrow x &= a^{-1} \circ x \circ a \\ \Leftrightarrow x \circ a^{-1} &= a^{-1} \circ x \circ a \circ a^{-1} \\ \Leftrightarrow x \circ a^{-1} &= a^{-1} \circ x \end{aligned}$$
      Siis $a^{-1} \in H$ ja H on aliryhmä.
   4. Normaalius: Olkoot $g \in G$ ja $h \in H$. Tällöin
      $$g \circ h \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \circ h = h \in H,$$
      joten H on normaali aliryhmä.

$\square$

3. Määritä ryhmän $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ aliryhmät ja vastaavat tekijäryhmät laskutaulukoineen.

   Ratkaisu. Aliryhmä $\langle 2 \rangle = \{0, 2\}$ on ainoa ryhmän $\mathbb{Z}_4$ ei-triviaali aliryhmä. Merkitään $H := \{0, 2\}$. Tekijäryhmä $\mathbb{Z}_4/H = \{\{0, 2\}, \{1, 3\}\}$.

$+$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$
$\{0,2\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$
$\{1,3\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2\}$

4. Etsi kaikki nollantekijät renkaassa $\mathbb{Z}_{14}$.

   Ratkaisu. Nollantekijät ovat: $2, 4, 6, 7, 8, 10, 12$.

5. Etsi kaikki ratkaisut yhtälölle
   a) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ renkaassa $\mathbb{Z}_{12}$,
   b) $x^2 + 2x + 2 = 0$ renkaassa $\mathbb{Z}_6$.

   Ratkaisu.

   a) $x \in \{0, 3, 5, 8, 9, 11\}$,

   b) ei ratkaisuja.

6. Olkoon $F = \{0, e, a, b\}$. Alla olevat taulukot määrittelevät joukon F laskutoimitukset. Osoita, että F on kunta, kun tiedetään, että laskutoimitukset ovat liitännäiset ja osittelulait ovat voimassa.

$+$	0	e	a	b
0	0	e	a	b
e	e	0	b	a
a	a	b	0	e
b	b	a	e	0

$\cdot$	0	e	a	b
0	0	0	0	0
e	0	e	a	b
a	0	a	b	e
b	0	b	e	a

   Todistus. F on rengas: Nyt $(F, +)$ on Abelin ryhmä, sillä oletuksen mukaan $+$ on liitännäinen. Taulukosta nähdään, että neutraalialkio on 0, kukin alkio on itsensä vasta-alkio ja $+$ on vaihdannainen, sillä laskutaulukko on symmetrinen diagonaalin suhteen. Oletuksen mukaan kertolasku on liitännäinen ja osittelulait ovat voimassa. Lisäksi rengas on vaihdannainen, sillä kertolaskun laskutaulukko on symmetrinen diagonaalin suhteen. Ykkösalkio on e (taulukosta) ja nollasta poikkeavilla alkioilla on käänteisalkiot; $e^{-1} = e, a^{-1}b, b^{-1} = a$. Joten F on kunta. $\square$

7. Olkoon $(R, +, \cdot)$ vaihdannainen ykkösellinen rengas, $a \in R$, sekä $(I, +, \cdot)$ renkaan R ideaali. Näytä, että kolmikko

$$(\{i + ar \mid i \in I, r \in R\}, +, \cdot)$$

on renkaan R ideaali.

Todistus. Merkitään $S := \{i + ar \mid i \in I, r \in R\}$. Koska I on alirengas $0_R \in I$, niin $0_R = 0_R + a \cdot 0_R \in S$, joten $S \neq \emptyset$. Koska $I \subseteq R$ (I on ideaali), niin $S \subseteq R$. Olkoot $a_1 = i_1 + ar_1$ ja $b_1 = i_2 + ar_2$ joukon S alkioita. Tällöin

$$a_1 - b_1 = i_1 + ar_1 - (i_2 + ar_2) = (i_1 - i_2) + a(r_1 - r_2) \in S.$$

Olkoot $a_1 \in S, a_1 = i_1 + ar_1$, $r_1, r, a \in R$ ja $i_1 \in I$. Tällöin, koska R on vaihdannainen rengas

$$ra_1 = r(i_1 + ar_1) = ri_1 + rar_1 = ri_1 + arr_1 \in S,$$

sillä $ri_1 \in I$ ja $rr_1 \in R$. Vastaavasti

$$a_1 r = (i_1 + ar_1)r = i_1 r + ar_1 r \in S.$$

Siis S on renkaan R ideaali. $\square$

8. Tutki ovatko renkaat $\mathbb{Z}_9$ ja $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ isomorfiset.

Ratkaisu. Renkaat $\mathbb{Z}_9$ ja $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ eivät ole isomorfiset.
Perustelu 1. Renkaassa $\mathbb{Z}_9$ on kaksi nollantekijää, 3 ja 6. Renkaassa $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ nollantekijöitä on 4; $(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)$.
Perustelu 2. Jos renkaitten $\mathbb{Z}_9$ ja $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ välillä olisi isomorfismi f, sille pätisi

$$\begin{aligned}
f(1) &= (1, 1),\\
f(2) &= f(1 + 1) = f(1) + f(1) = (1, 1) + (1, 1) = (2, 2),\\
f(3) &= f(1 + 2) = f(1) + f(2) = (1, 1) + (2, 2) = (0, 0),\\
f(4) &= f(1 + 3) = f(1) + f(3) = (1, 1) + (0, 0) = (1, 1).
\end{aligned}$$

Siis $f(1) = f(4)$, joten injektiivisyyden nojalla $1 = 4$. Ristiriita.

9. Laske $f(x) + g(x)$ ja $f(x)g(x)$ polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_8[x]$, kun $f(x) = 4x - 5$ ja $g(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

Ratkaisu. $f(x) + g(x) = 4x - 5 + 2x^2 - 4x + 2 = 2x^2 + 5$ ja $f(x)g(x) = (4x - 5)(2x^2 - 4x + 2) = 6x^2 + 4x + 6$.

10. Tutki ovatko seuraavat polynomit jaottomia annetussa renkaassa:
a) $2x^3 + x^2 + 2x + 2$ renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$,
b) $x^3 - 9$ renkaassa $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

Ratkaisu.

a) Sijoittamalla kukin alkioista $\{0,1,2,3,4\}$ vuorollaan polynomiin $2x^3 + x^2 + 2x + 2$, nähdään, ettei kyseisellä polynomilla ole nollakohtaa renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$, joten $2x^3 + x^2 + 2x + 2$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Z}_5[x]$.

b) Sijoitetaan $x = 4$, silloin $4^3 - 9 = 0$, joten $x^3 - 9$ on jaollinen polynomilla $x - 4$ renkaassa $\mathbb{Z}_{11}[x]$. $(x^3 - 9 = (x - 4)(x^2 + 4x + 5))$.