

Algebra

Syksy 2009

Harjoitus 2 (Vko 38)

Huom. Luentojen alkuosa on Algebran kotisivulla monisteiden saapumiseen saakka. <http://www.joensuu.fi/matematiikka/kurssit/Algebra08/Algebra.htm>

1. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että luvuilla a ja b on sama jakojäännös jaettaessa luvulla n , jos ja vain jos on olemassa $k \in \mathbb{Z}$, jolle $a - b = kn$.

Opastus: Kirjoita jakoyhtälön mukainen esitys luvuille a ja b , kun ne jaetaan luvulla n .

2. Olkoot $a, b > 0$. Osoita, että $\frac{a}{d}$ ja $\frac{b}{d}$ ovat keskenään jaottomia, kun $\text{syt}(a, b) = d$.

Vihje: Lause 1.10.

3. Määrää Eukleideen algoritmilla

a) $\text{syt}(156, 221)$,

b) $\text{syt}(20785, 44350)$.

- c) Esitä $\text{syt}(20785, 44350)$ lukujen 20785 ja 44350 lineaarikombinaationa.

4. Etsi kolme lukua, jotka ovat suhteellisia alkulukuja siten, että mitkään kaksi näistä luvuista eivät ole keskenään suhteellisia alkulukuja. ($\text{syt}(a, b, c) = 1$ ja $\text{syt}(a, b) \neq 1$, $\text{syt}(a, c) \neq 1$, $\text{syt}(b, c) \neq 1$).

5. Ratkaise yhtälöt

a) $127x - 87y = 1$,

b) $2x + 4y = 9$.

6. Etsi lukujen 8820 ja 613470 kanoniset esitykset.

7. a) Osoita, että jos p on alkuluku ja $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, niin $p \mid a_i$ jollakin a_i .

- b) Osoita, että jos p on alkuluku ja $p \mid a^n$, niin $p^n \mid a^n$.

Vihje: a)-kohta induktiolla, b)-kohdassa voi käyttää a)-kohdan tulosta.