

Algebra Syksy 2009
Harjoitus 5 (vko 41)

1. Olkoon $*$ rationaalilukujen joukon laskutoimitus, jolle $x * y = \frac{x+y-xy-2}{3}$.
 Onko $*$ liitännäinen, onko vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkio?
 Löytyykö kaikille joukon \mathbb{Q} alkioille käänteisalkiot laskutoimituksen $*$ suhteen?

2. Olkoon \circ laskutoimitus joukossa X ja \bullet laskutoimitus joukossa Y . Täl-
 löin yhtälö

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 \circ x_2, y_1 \bullet y_2)$$

määrittelee laskutoimituksen karteesisessa tulossa $X \times Y$. Osoita, että
 $*$ on liitännäinen joukossa $X \times Y$, jos \circ on liitännäinen joukossa X ja
 \bullet on liitännäinen joukossa Y .

3. Tarkastellaan laskutoimitusta $A \circ B := A \setminus B$ joukon $X \neq \emptyset$ potens-
 sijjoukossa $\mathcal{P}(X)$. Onko laskutoimituksella \circ neutraalialkiota joukossa
 $\mathcal{P}(X)$?

4. Määritä käänteisalkiot matriisien yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen
 joukossa K ,

$$K := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Tutki, ovatko seuraavat (joukko, laskutoimitus)-parit ryhmiä. Ilmoita
 kustakin neutraalialkio ja käänteisalkiot. Mikäli eivät ole ryhmiä, selitä
 miksi (vastaesimerkki!).

- a) Joukko $\{1, -1\}$ ja tavallinen kertolasku.
 b) Parillisten kokonaislukujen joukko $2\mathbb{Z}$ ja tavallinen yhteenlasku.
 c) $2\mathbb{Z}$ ja tavallinen kertolasku.
 d) \mathbb{R}^2 ja vektorien yhteenlasku.

6. Olkoon $A := \{a, b, c\}$, missä a, b ja c ovat kaikki eri alkioita. Mitkä
 ryhmän ominaisuudet ovat voimassa parille $(A, *)$, kun

	a)	b)	c)	d)	e)
$*$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$
a	$a \ b \ c$	$a \ \ \ c$	$a \ b \ 5$	$b \ b \ b$	$a \ b \ c$
b	$b \ a \ c$	$b \ a \ c$	$b \ a \ c$	$b \ b \ b$	$b \ c \ a$
c	$c \ a \ b$	$c \ a \ b$	$c \ a \ b$	$b \ b \ b$	$c \ a \ b$