

**Algebra Syksy 2009**  
**Harjoitus 6 (vko 42)**

1. Olkoot  $(G_1, \circ)$  ja  $(G_2, \bullet)$  ryhmiä. Olkoon  $*$  joukon  $G_1 \times G_2$  laskutoimitus,

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \bullet b_2)$$

kaikilla  $a_1, b_1 \in G_1$  ja  $a_2, b_2 \in G_2$ . Osoita  $(G_1 \times G_2, *)$  ryhmäksi. (Huom! Liitännäisyyttä ei tarvitse osoittaa, vrt. Harjoitus 5 tehtävä 2.)

2. Olkoon  $(G, \circ)$  ryhmä ja  $*$  joukon  $G$  laskutoimitus

$$a * b := b \circ a$$

Totea  $(G, *)$  ryhmäksi.

3. Olkoon  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  reaalialkioisten  $2 \times 2$ -matriisien joukko ja olkoot  $+$  niiden yhteenlasku ja  $\cdot$  matriisitulo. Kirjoita näkyviin ehtotyypisesti

a) niiden matriisien joukko  $A$ , joilla vasemmassa alakulmassa on luku 0.

b) niiden matriisien joukko  $B$ , joilla alkioden summa on positiivinen.

c) niiden matriisien joukko  $C$ , joilla oikeassa alakulmassa on luku 1.

Tutki mitkä pareista  $(A, +)$ ,  $(B, +)$ ,  $(C, \cdot)$  ovat ryhmiä.

4. Joukon  $\{1, 2, 3\}$  permutaatioiden joukko on  $S_3 := \{[a, b, c] \mid \{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}\}$ . Määritellään operaatiot

$$[a, b, c] \circ [d, e, f] := [a, e, c]$$

$$[a, b, c] * [d, e, f] := [a, b, c]$$

$$[a, b, c] \oplus [d, e, f] := [a + d, b + e, c + f]$$

a) Mitkä operaatioista ovat laskutoimituksia joukossa  $S_3$ ? Miksi?

b) Mitkä edellä olevista kohdista, joissa todella oli kyseessä laskutoimitus, ovat vaihdannaisia, mitkä liitännäisiä?

5. Etsi joukon  $S_3$  permutaatioille käänteispermutaatiot (laskutoimituksena permutaatioiden yhdistäminen).

6. Määrää permutaatioiden

$$[4, 6, 2, 3, 5, 1], [6, 5, 4, 3, 1, 2], [5, 2, 3, 4, 6, 1], [3, 1, 2, 4, 6, 5], [3, 5, 6, 1, 4, 2]$$

radat. Mitkä permutaatioista ovat syklejä ja miten ne voidaan merkitä?