Algebra
Syksy 2009
Harjoitus 8 (vko 44)

1. Jos G on ryhmä neutraalialkionaan e, jos $a \in G$ ja $a^{12} = e$, niin mikä alkion a kertaluku voi olla? *Opastusta.* Käytä Lausetta 6.13.

2. Todista: Jos kaikkien ryhmän G alkioiden paitsi neutraalialkion kertaluku on 2, niin G on Abelin ryhmä.

3. a) Määrää alkioiden 2 ja 5 virittämät ryhmän $\mathbb{Z}_{10}$ aliryhmät.
   b) Määrää alkioiden 2 ja 3 virittämät ryhmän $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *_5)$ aliryhmät.

4. Olkoon $(G, \circ)$ on ryhmä ja
$$H = \{x \in G \mid x \circ c = c \circ x \quad \forall \quad c \in G\}.$$
   Osoita, että $(H, \circ)$ on ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmä.

5. Olkoot $(H_1, \circ)$ ja $(H_2, \circ)$ ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmiä. Osoita, että tällöin $(H_1 \cap H_2, \circ)$ on ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmä.

6. Olkoon $H = \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $(H, \cdot)$ on ryhmän $(\mathbb{R} \setminus 0, \cdot)$ aliryhmä.

7. Mitkä seuraavista joukon $\mathbb{Z}_{11}$ osajoukoista muodostavat ryhmän laskutoimituksen $*_{11}$ suhteen?
   a) $\{1, 3, 4, 5, 9\}$,
   b) $\{1, 3, 4, 5, 8\}$,
   c) $\{1, 10\}$.