Algebra
Syksy 2009
Harjoitus 9 (vko 45)

1. Osoita, että jokainen syklinen ryhmä on Abelin ryhmä.

   Vihje: Lause 4.4.

2. Määritä seuraavien permutaatioryhmän $(S_4, \circ)$ aliryhmien keskukset:

   a) Kiertojen ryhmä $K_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$.

   b) Symmetriaryhmä $D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$.

3. Olkoot H ja K ryhmän G aliryhmiä.

   a) Osoita esimerkin avulla, että $H \cup K$ ei välttämättä ole aliryhmä.

   b) Osoita, että $H \cup K$ on ryhmän G aliryhmä, jos ja vain jos $H \subseteq K$ tai $K \subseteq H$.

   Opastusta. a) Ks. vaikkapa Esimerkki 6.31.

   b) $(\Rightarrow)$ Tee antiteesi. Ota alkiot $h \in H \setminus K$ ja $k \in K \setminus H$, jolloin $h, k \in H \cup K$, ja näytä, että $h \circ k \notin H \cup K$. $(\Leftarrow)$ Lähes selvä.

4. Määritä osajoukon $H = \{4, 6\}$ virittämä ryhmän $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ aliryhmä $\langle H \rangle$.

5. Määritä osajoukon $S = \{12, 30\}$ virittämä ryhmän $(\mathbb{Z}_{36}, +_{36})$ aliryhmä $\langle S \rangle$.

6. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$. Määritä aliryhmään $\langle 3 \rangle$ liittyvät erilaiset sivuluokat.

7. Määrää alkioiden 2 ja 3 määräämät sivuluokat modulo H, kun H on alkion 6 virittämä aliryhmä $(H, +_{30})$ ryhmässä $(\mathbb{Z}_{30}, +_{30})$. Mitä tiedät Lagrangen lauseen perusteella erilaisten sivuluokkien modulo H lukumäärästä?