Algebra
Syksy 2009
Harjoitus 10 (vko 46)

1. Olkoon G syklinen ryhmä ja N sen aliryhmä. Todista, että N on syklinen ja normaali aliryhmä.

2. Olkoot H_1 ja H_2 ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Onko $H_1 \cap H_2$ ryhmän G normaali aliryhmä?

3. Olkoon $G := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ ja määritellään laskutoimitus $+$ joukossa $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ seuraavasti:
$$(a, b) + (c, d) := (a +_6 c, b +_2 d).$$
Silloin $(G, +)$ on ryhmä. Olkoon N syklinen aliryhmä $\langle(1, 1)\rangle$. Etsi tekijäryhmä G/N. Minkä tutun ryhmän kanssa tekijäryhmä G/N on isomorfinen?

4. Olkoon $(H, +_6)$ alkion 3 virittämä ryhmän $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ syklinen aliryhmä. Määrää tekijäryhmän $(\mathbb{Z}_6/H, +_6)$ alkiot.

5. Määrää edellisen tehtävän tekijäryhmän laskutoimitustaulukko.

6. Olkoon $f : G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Todista, että f on injektio jos ja vain jos sen ydin $\ker f = \{e\}$.

   Opastusta. Osoita, että $\{e\} \subseteq \ker f$ (helppo) ja $\ker f \subseteq \{e\}$ (ei vaikea). Toiseen suuntaan käytä homomorfisuutta.

7. Voidaan osoittaa, että joukko $S = \{a, b, c, d\}$ muodostaa renkaan $(S, +, \cdot)$, kun laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ on määritelty seuraavien taulukoiden avulla.

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	c

   Vastaa **perustellen**:

   a) Onko S vaihdannainen rengas?

   b) Määrää 0_S.

   c) Määrää käänteisalkiot yhteenlaskun suhteen.

   d) Onko rengas S ykkösellinen?