Algebra
Syksy 2009
Harjoitus 11 (vko 47)

1. Todista Lause 9.11: Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas ja 0_R sen neutraalialkio. Silloin kaikilla $a \in R$ on $0_R \cdot a = 0_R$ ja $a \cdot 0_R = 0_R$.

2. Olkoon $(G, +)$ Abelin ryhmä, jonka nolla-alkio on 0. Määritellään $x \cdot y = 0$ kaikilla $x, y \in G$. Onko $(G, +, \cdot)$ rengas, kun joukossa G on vain yksi alkio?

3. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}$ uusi kertolasku säännöllä $a * b := 1$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}$.

   a) Muodostavatko $\mathbb{Z}$, tavallinen yhteenlasku ja tämä uusi kertolasku $*$ renkaan?

   b) Muodostavatko $\mathbb{Z}$, tavallinen yhteenlasku ja seuraava kertolasku: $a \dagger b := 0$ kaikilla a, $b \in \mathbb{Z}$, renkaan?

   Opastusta. Käy läpi renkaan aksioomat tarpeellisin osin: $(\mathbb{Z}, +)$ on tunnetusti Abelin ryhmä, joten jäljelle jäävät kertolaskun ominaisuudet ja osittelulait.

4. Ratkaise yhtälö $x^2 + 2x + 4 = 0$ renkaassa $\mathbb{Z}_6$.

5. Etsi kaikki renkaan $\mathbb{Z}_{12}$ nollantekijät.

6. Olkoon R rengas, ja olkoon $U(R)$ niiden renkaan R alkioiden joukko, joille on olemassa käänteisalkio renkaan kertolaskun $\cdot$ suhteen. Mitä ovat $U(\mathbb{Z})$, $U(\mathbb{Z}_{12})$ ja $U(\mathbb{Z}_7)$?

7. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}$ uusi yhteenlasku $\oplus$ ja uusi kertolasku $\odot$ seuraavasti:
$$\begin{aligned} a \oplus b &:= a + b - 1, \\ a \odot b &:= a + b - ab. \end{aligned}$$
   Osoita, että $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ on kokonaisalue.