

Algebra
Syksy 2009
Harjoitus 12 (vko 48)

1. Olkoon $(F, +, \cdot)$ kunta. Todista, että tällöin $(F \setminus \{0_F\}, \cdot)$ on Abelin ryhmä.

2. Määrää

$$\frac{2}{3} +_7 \frac{4}{6}$$

kunnassa $(\mathbb{Z}_7, +_7, *_7)$.

3. Ratkaise yhtälöpari $2x+3y = 2$ ja $4x-3y = -3$ kunnassa $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11}, *_{11})$.

4. Olkoon R kokonaisalue. Todista, että joukko

$$T := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & a \\ 0 & 0 \end{array} \right) \mid a \in R \right\}$$

on matriisirenkaan $R^{2 \times 2}$ alirengas. Onko se kokonaisalue? Entä kunta?

5. Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] := \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ on renkaan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alirengas.

6. Osoita, että renkaan \mathbb{Z}_8 niiden alkioiden, joilla ei ole käänteisalkioita, joukko muodostaa renkaan \mathbb{Z}_8 ideaalin.

7. Olkoot $(I_1, +, \cdot)$ ja $(I_2, +, \cdot)$ renkaan $(R, +, \cdot)$ ideaaleja. Osoita, että $(I_1 \cap I_2, +, \cdot)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ ideaali.