

**Algebra**  
**Syksy 2009**  
**Harjoitus 13 (vko 49)**

1. Lemmassa 10.20 määriteltiin alkion  $a$  virittämä ideaali (merkitään  $(a)$ ), jota kutsutaan myös pääideaaliksi. Etsi kaikki pääideaalit renkaissa
  - a)  $\mathbb{Z}_5$ ,
  - b)  $\mathbb{Z}_{12}$ .
2. Olkoon  $I = \{0, 5\}$ . Näytä, että  $I$  on renkaan  $\mathbb{Z}_{10}$  ideaali. Muodosta tekijärenkas  $\mathbb{Z}_{10}/I$  ja sen laskutaulukot. Onko tekijärenkas kokonaisalue tai kunta? Onko ideaali siis maksimaalinen?
3.
  - a) Etsi kaikki maksimaaliset ideaalit renkaassa  $\mathbb{Z}_6$ .
  - b) Näytä, että renkaalla  $\mathbb{Z}_8$  on täsmälleen yksi maksimaalinen ideaali.
4. Ovatko seuraavat väitteet oikein vai väärin? Perustele lyhyesti tai etsi vastaesimerkki.
  - a)  $(\{0_R\}, +, \cdot)$  on renkaan  $(R, +, \cdot)$  ideaali.
  - b) Jokainen renkaan  $R$  ideaali on renkaan  $R$  alirengas.
  - c) Jokainen renkaan  $R$  alirengas on myös renkaan  $R$  ideaali.
  - d)  $(\{0, 4, 8\}, +, \cdot)$  on renkaan  $\mathbb{Z}_{12}$  maksimaalinen ideaali.
  - e) Olkoon  $R$  ykkösellinen rengas ja  $I$  sen ideaali. Tällöin  $1_{R/I} = 1_R$ .

5. Olkoon

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ja  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right] = a + bi.$$

Osoita, että  $f$  on rengashomomorfismi  $K \rightarrow \mathbb{C}$ .

6. Olkoon  $(R, +, \cdot)$  rengas ja  $f : R \rightarrow R$  rengashomomorfismi. Olkoon

$$A = \{a \in R \mid f(a) = a\}.$$

Näytä, että  $(A, +, \cdot)$  on renkaan  $(R, +, \cdot)$  alirengas.

7. Tutki onko kuvaus  $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ ,  $f(a) = 2a$  rengasisomorfismi renkaalta  $\mathbb{Z}$  renkaalle  $2\mathbb{Z}$ .