Algebra
Syksy 2007
Harjoitukset

1. Olkoon $a \in \mathbb{Z}$. Totea, että aina $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$ ja $-a \mid a$.

2. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Todista implikaatiot:

   a) $a \mid b$ ja $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$,

   b) $a \mid b$ ja $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.

3. Olkoon $a \mid b_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Osoita, että

   $$a \mid b_1c_1 + \ldots + b_nc_n$$

   kaikille $c_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$.

4. Etsi Jakoyhtälön esitys, kun

   a) luku 36 jaetaan luvulla 7,

   b) luku 302 jaetaan luvulla 19,

   c) luku -302 jaetaan luvulla 19.

5. Osoita, että parittoman luvun neliö voidaan aina esittää muodossa $8k + 1$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.

   Vihje: mitä voidaan sanoa kahden peräkkäisen luvun tulosta?

6. Olkoot a, $b \in \mathbb{Z}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että luvuilla a ja b on sama jakojäännös jaettaessa luvulla n, jos ja vain jos on olemassa $k \in \mathbb{Z}$, jolle $a - b = kn$.

   Opastus: Kirjoita jakoyhtälön mukainen esitys luvuille a ja b, kun ne jaetaan luvulla n.

7. Olkoot $a, b > 0$. Osoita, että $\frac{a}{d}$ ja $\frac{b}{d}$ ovat keskenään jaottomia, kun $\mathrm{syt}(a, b) = d$.

   Vihje: Lause 1.10.

8. Määrää Eukleideen algoritmilla

   a) $\mathrm{syt}(156, 221)$,

   b) $\mathrm{syt}(20785, 44350)$.

9. Esitä $\text{syt}(20785, 44350)$ lukujen 20785 ja 44350 lineaarikombinaationa.

10. Etsi kolme lukua, jotka ovat suhteellisia alkulukuja siten, että mitkään kaksi näistä luvuista eivät ole keskenään suhteellisia alkulukuja. ($\text{syt}(a, b, c) = 1$ ja $\text{syt}(a, b) \neq 1$, $\text{syt}(a, c) \neq 1$, $\text{syt}(b, c) \neq 1$).

11. Ratkaise yhtälöt

    a) $127x - 87y = 1$,

    b) $2x + 4y = 9$.

12. Etsi lukujen 8820 ja 613470 kanoniset esitykset.

13. Osoita, että jos p on alkuluku ja $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, niin $p \mid a_i$ jollakin a_i.

14. Osoita, että jos p on alkuluku ja $p \mid a^n$, niin $p^n \mid a^n$.

15. Määrää lukujen 15, 281 ja -64 pienimmät ei-negatiiviset jäännökset modulo 6.

16. Onko
$$[15] \cup [281] \cup [-64] = \mathbb{Z},$$
    kun tarkastellaan kongruenssia modulo 3?

17. Ratkaise lineaariset kongruenssit (ilmoita vastaukset pienimmän ei-negatiivisen jäännöksen avulla)

    a) $3x \equiv 6 (\bmod 8)$,

    b) $128x \equiv 833 (\bmod 1001)$,

    c) $58x \equiv 2 (\bmod 32)$.

18. Ratkaise kongruenssiyhtälö $x^2 \equiv x (\bmod p)$, missä p on alkuluku.

19. Olkoon p alkuluku. Osoita, että $a^2 \equiv 1 (\bmod p)$ jos ja vain jos $a \equiv 1 (\bmod p)$ tai $a \equiv -1 (\bmod p)$.

20. Selvitä ilman laskinta, millä luvuista 3, 5, 11 on jaollinen

    a) 30083625.

    b) 807011455704608.

21. Johda testi sille, milloin luku $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ on jaollinen luvulla 9 ja ratkaise testisi avulla onko luku 99845638762458987 jaollinen luvulla 9.

22. Osoita, että jos $a \equiv b(\mod 2n)$, niin $a^2 \equiv b^2(\mod 4n)$.

23. *Todista:*

    a) $\mathrm{syt}(n, n{+}1) = 1$ kaikille $n \in \mathbb{N}$.

    b) Jos p on alkuluku, niin $\mathrm{syt}((p{-}1)!, p) = 1$. (osa Fermat'n pienen lauseen todistusta)

24. Osoita todeksi tai epätodeksi Konjektuuri:

    Jos $a^2 \equiv b^2 \ (\mod m)$, niin $a \equiv b \ (\mod m)$ tai $a \equiv -b \ (\mod m)$.

25. Mitä on $5^{2\,000\,000} \mod 24$?

26. Määrää Fermat'n pienen lauseen avulla pienin ei-negatiivinen jäännös, kun

    a) 3^{1000} jaetaan luvulla 7,

    b) 2^n jaetaan luvulla 17, missä $16 \mid n$.

27. Jos $k \equiv 1 \ (\mod 4)$, niin minkä luvuista 0, 1, 2, 3 kanssa kongruentti modulo 4 on luku

    a) $6k + 5$?

    b) $2k^3 + k + 3$?

28. Kirjoita joukkojen $\mathbb{Z}_6$ ja $\mathbb{Z}_7$ yhteen- ja kertolaskun laskutaulukot.

29. Onko kokonaislukujen

    a) kertolasku,

    b) yhteenlasku,

    laskutoimitus joukossa $A = \{1, -1, 0\}$? Perustele!

30. Mitkä seuraavista operaatioista/säännöistä **eivät** ole laskutoimituksia eli binäärioperaatioita? Miksi?

    a) Parittomien kokonaislukujen joukossa: lukupariin liitetään niiden keskiarvo.

    b) Rationaalilukujen joukossa: lasketaan kolmen luvun tulo.

    c) Reaalilukujen joukossa: $a * b := (a + 2b)/a$.

    d) Luonnollisten lukujen joukossa: $n * m := 5$.

31. Ovatko kokonaislukujoukon $\mathbb{Z}$ laskutoimitukset $\circ$

a) $x \circ y = x$,

b) $x \circ y = |x - y|$,

c) $x \circ y = x + y - 1$,

liitännäisiä ja/tai vaihdannaisia?

32. Olkoon $\circ$ laskutoimitus joukossa X ja $\bullet$ laskutoimitus joukossa Y. Tällöin yhtälö

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 \circ x_2, y_1 \bullet y_2)$$

määrittelee laskutoimituksen karteesisessa tulossa $X \times Y$. Osoita, että $*$ on liitännäinen joukossa $X \times Y$, jos $\circ$ on liitännäinen joukossa X ja $\bullet$ on liitännäinen joukossa Y.

33. Olkoon $*$ rationaalilukujen joukon laskutoimitus, jolle

$$x * y = \frac{x + y - xy - 2}{3}.$$

Onko $*$ liitännäinen, onko vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkio? Löytyykö kaikille joukon $\mathbb{Q}$ alkioille käänteisalkiot laskutoimituksen $*$ suhteen?

34. Tarkastellaan laskutoimitusta

$$A \circ B := A \setminus B$$

joukon $X \neq \emptyset$ potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$. Onko laskutoimituksella $\circ$ neutraalialkiota joukossa $\mathcal{P}(X)$?

35. Määritä käänteisalkiot matriisien yhteenlaskun ja kertolaskun suhteen joukossa K,

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

36. Tutki, ovatko seuraavat (joukko, laskutoimitus)-parit ryhmiä. Ilmoita kustakin neutraalialkio ja käänteisalkiot. Mikäli eivät ole ryhmiä, selitä miksi (vastaesimerkki!).

a) Joukko $\{1, -1\}$ ja tavallinen kertolasku.

b) Parillisten kokonaislukujen joukko $2\mathbb{Z}$ ja tavallinen yhteenlasku.

c) $2\mathbb{Z}$ ja tavallinen kertolasku.

d) $\mathbb{R}^2$ ja vektorien yhteenlasku.

37. Olkoon $A := \{a, b, c\}$, missä a, b ja c ovat kaikki eri alkioita. Mitkä ryhmän ominaisuudet ovat voimassa parille $(A, *)$, kun

a)

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	b

b)

$*$	a	b	c
a	a		c
b	b	a	c
c	c	a	b

c)

$*$	a	b	c
a	a	b	5
b	b	a	c
c	c	a	b

d)

$*$	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	b
c	b	b	b

e)

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

38. Olkoot $(G_1, \circ)$ ja $(G_2, \bullet)$ ryhmiä. Olkoon $*$ joukon $G_1 \times G_2$ laskutoimitus,
$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \bullet b_2)$$
kaikilla $a_1, b_1 \in G_1$ ja $a_2, b_2 \in G_2$. Osoita $(G_1 \times G_2, *)$ ryhmäksi. (Huom! Liitännäisyyttä ei tarvitse osoittaa, vrt. tehtävä 32.)

39. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja $*$ joukon G laskutoimitus
$$a * b := b \circ a$$
Totea $(G, *)$ ryhmäksi.

40. Olkoon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ reaalialkioisten 2×2-matriisien joukko ja olkoot $+$ niiden yhteenlasku ja $\cdot$ matriisitulo. Kirjoita näkyviin ehtotyyppisesti

    a) niiden matriisien joukko A, joilla vasemmassa alakulmassa on luku 0.

    b) niiden matriisien joukko B, joilla alkioiden summa on positiivinen.

    c) niiden matriisien joukko C, joilla oikeassa alakulmassa on luku 1.

    Tutki mitkä pareista $(A, +)$, $(B, +)$, $(C, \cdot)$ ovat ryhmiä.

41. Joukon $\{1, 2, 3\}$ permutaatioiden joukko on $S_3 := \{\, [a, b, c] \mid \{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}\,\}$. Määritellään operaatiot

    $[a, b, c] \circ [d, e, f] := [a, e, c]$

    $[a, b, c] * [d, e, f] := [a, b, c]$

    $[a, b, c] \oplus [d, e, f] := [a + d, b + e, c + f]$

    a) Mitkä operaatioista ovat laskutoimituksia joukossa S_3? Miksi?

    b) Mitkä edellä olevista kohdista, joissa todella oli kyseessä laskutoimitus, ovat vaihdannaisia, mitkä liitännäisiä?

42. Olkoon $\circ$ joukon G liitännäinen laskutoimitus.

a) Todista, että $(a \circ b) \circ (c \circ d) = a \circ \big((b \circ c) \circ d\big)$.

b) Olettaen, että alkioilla a ja b on käänteisalkiot, laske $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1})$.

c) Mitä voit edellisestä päätellä?

43. Laske

a) $[2, 5, 3, 6, 1, 4]^{-1}$,

b) $[2, 7, 5, 3, 8, 6, 1, 4]^{-1}$.

44. Todista Lauseen 4.4 kohtien 1 ja 2 yleistykset: Jos a on ryhmän $(G, \circ)$ alkio ja n, $k \in \mathbb{Z}$ ovat negatiivisia, niin

$$\begin{array}{lrcl} 1. & a^n \circ a^k & = & a^{n+k} \\ 2. & (a^n)^k & = & a^{nk} \end{array}$$

Saat tietysti käyttää vastaavia laskusääntöjä positiiviluvuille.

45. Etsi tasasivuisen kolmion symmetriaryhmä D_3. Nimeä symmetriat samaan tapaan kuin neliön tapauksessa, eli esimerkiksi R_x olisi kierto x astetta vastapäivään, ja keksi muillekin symmetrioille jokin yksi symboli. Montako alkiota on ryhmässä D_3? Entä montako alkiota on permutaatioryhmässä S_3? Kirjoita ryhmän D_3 laskutoimitustaulukko.

46. Todista, että $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ja laskutoimitus $*$,

$$(a, b) * (c, d) := (ac, bc + d)$$

muodostavat ryhmän. Onko se Abelin ryhmä?

47. Laske

a) 5^{-3} ryhmässä $(\mathbb{Z}_8, +_8)$,

b) $[2, 3, 4, 1]^2$ ja $[1, 3, 2, 4]^{-2}$ ryhmässä S_4,

c) R_{270}^{-36} ryhmässä D_4.

48. Osoita, että ryhmässä on jokaisella yhtälöllä $a \circ x = b$ tasan yksi ratkaisu.

Opastus: Osoita, että ratkaisuja on ainakin yksi, ja toisaalta (vaikkapa supistussäännön avulla), että kahta eri ratkaisua ei ole.

49. Mitkä seuraavista joukon $\mathbb{Z}_{11}$ osajoukoista muodostavat ryhmän laskutoimituksen $*_{11}$ suhteen?
a) $\{1, 3, 4, 5, 9\}$,
b) $\{1, 3, 4, 5, 8\}$,
c) $\{1, 10\}$.

50. Olkoon $S := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ja $a * b := a + b + ab$.
a) Osoita, että $*$ on laskutoimitus joukossa S.
b) Osoita, että $(S, *)$ on ryhmä.
c) Ratkaise yhtälö $2 * x * 3 = 7$ ryhmässä S.

51. a) Ratkaise ryhmässä $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, *_{13})$ yhtälö

$$x *_{13} 3 = 8.$$

b) Ratkaise ryhmässä $(\mathbb{Z}_{27}, +_{27})$ yhtälö

$$23 = -_{27}(2x) +_{27} 24.$$

Huomaa, että $-_{27}(2x)$ tarkoittaa monikerran $2x = x +_{27} x$ vasta-alkiota kyseisessä ryhmässä!

52. Näytä 'värittämällä', että ryhmien $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}, *_7)$ ja $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ välillä on homomorfismi. Mikä se on?

53. Olkoot $(G_1, \circ)$ ja $(G_2, *)$ ryhmiä ja $e_2 \in G_2$ neutraalialkio. Osoita, että kuvaus $f : G_1 \to G_2$, $f(x) = e_2$ on homomorfismi.

54. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, on homomorfismi ryhmältä $(\mathbb{R}, +)$ ryhmälle $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

55. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja olkoon $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ kuvaus

$$f(m) = [m]$$

kaikilla $m \in \mathbb{Z}$. Osoita, että f on homomorfismi ryhmältä $(\mathbb{Z}, +)$ ryhmälle $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

56. Näytä, että kuvaus $g : \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_3$, $g([x]_{18}) = [2x]_3$, on homomorfismi ja etsi ko. kuvauksen ydin.

57. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja olkoon $(G, *)$ ryhmä, jonka laskutoimitus määritellään yhtälöllä

$$a * b = b \circ a$$

kaikilla $a, b \in G$. Osoita, että kuvaus $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$ on isomorfismi ryhmältä $(G, \circ)$ ryhmälle $(G, *)$.

58. Tutki, onko kuvaus $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ isomorfismi ryhmältä $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ itselleen, kun

a) $f(x) = 3x$,

b) $f(x) = \sqrt{x}$.

59. Olkoon $(G, \circ)$ on ryhmä ja

$$H = \{x \in G \mid x \circ c = c \circ x \quad \forall \quad c \in G\}.$$

Osoita, että $(H, \circ)$ on ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmä.

60. Olkoot $(H_1, \circ)$ ja $(H_2, \circ)$ ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmiä. Osoita, että tällöin $(H_1 \cap H_2, \circ)$ on ryhmän $(G, \circ)$ aliryhmä.

61. Olkoon $H = \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $(H, \cdot)$ on ryhmän $(\mathbb{R} \setminus 0, \cdot)$ aliryhmä.

62. Jos G on ryhmä neutraalialkionaan e, jos $a \in G$ ja $a^{12} = e$, niin mikä alkion a kertaluku voi olla? *Opastusta.* Käytä Lausetta 6.13.

63. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja $a \in G$. Osoita, että alkion kertaluku on sama kuin sen virittämän aliryhmän kertaluku.

64. Osoita, että jokainen syklinen ryhmä on Abelin ryhmä.

Vihje: Lause 4.4.

65. Ryhmän G *keskus* (*center, zentrum*) on joukko

$$Z(G) := \{a \in G \mid a \circ g = g \circ a \text{ kaikilla } g \in G\}.$$

Todista, että $Z(G)$ on ryhmän G aliryhmä.

Opastusta. Käytä Aliryhmätestiä.

66. Määritä seuraavien permutaatioryhmän $(S_4, \circ)$ aliryhmien keskukset (ks. tehtävä 65):

a) Kiertojen ryhmä $K_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$.

b) Symmetriaryhmä $D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$.

67. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä. Todista, että kahden alkion $a, b \in G$, tulon $a \circ b$ kertaluku on sama kuin tulon $b \circ a$.

Opastusta. Näytä aluksi, että jos $(a \circ b)^k = e$, niin myös $(b \circ a)^k = e$ (liitännäisyys ym.). Sitten tarkastele tilannetta kun k on kertaluku.

68. Todista: Jos kaikkien ryhmän G alkioiden paitsi neutraalialkion kertaluku on 2, niin G on Abelin ryhmä.

69. Olkoot H ja K ryhmän G aliryhmiä.

    a) Osoita esimerkin avulla, että $H \cup K$ ei välttämättä ole aliryhmä.

    b) Osoita, että $H \cup K$ on ryhmän G aliryhmä, jos ja vain jos $H \subseteq K$ tai $K \subseteq H$.

    Opastusta. a) Ks. vaikkapa Esimerkki 6.31.

    b) ($\Rightarrow$) Tee antiteesi. Ota alkiot $h \in H \setminus K$ ja $k \in K \setminus H$, jolloin $h, k \in H \cup K$, ja näytä, että $h \circ k \notin H \cup K$. ($\Leftarrow$) Lähes selvä.

70. Olkoon G syklinen ryhmä ja N sen aliryhmä. Todista, että N on syklinen ja normaali aliryhmä.

    Opastusta. Mitä syklisistä ryhmistä todistettiin aiemmin?

71. Olkoot H_1 ja H_2 ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Onko $H_1 \cap H_2$ ryhmän G normaali aliryhmä?

    Opastusta. Aliryhmäksi: ks. tehtävä 60. Normaalius: käytä vaikkapa Lausetta 7.3.

72. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_{20}, +_{20})$. Määritä aliryhmään $\langle 10 \rangle$ liittyvät sivuluokat.

73. Olkoon $G := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ ja määritellään laskutoimitus $+$ joukossa $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ seuraavasti:
$$(a, b) + (c, d) := (a +_6 c, b +_2 d).$$
    Silloin $(G, +)$ on ryhmä. Olkoon N syklinen aliryhmä $\langle (1, 1) \rangle$. Etsi tekijäryhmä G/N. Minkä tutun ryhmän kanssa tekijäryhmä G/N on isomorfinen?

    Vihje. Sivuluokkia on kaksi.

74. Onko ryhmän keskus (ks. tehtävä 65) normaali aliryhmä?

75. Esitä alkion 3 virittämän ryhmän $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ syklisen aliryhmän laskutoimitustaulukko.

76. Määrää alkioiden 2 ja 3 määräämät sivuluokat modulo H, kun H on alkion 6 virittämä aliryhmä $(H, \oplus)$ ryhmässä $(\mathbb{Z}_{30}, \oplus)$. Mitä tiedät Lagrangen lauseen perusteella erilaisten sivuluokkien modulo H lukumäärästä?

77. Olkoon $(H, \oplus)$ alkion [3] virittämä jäännösluokkaryhmän $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ syklinen aliryhmä. Määrää tekijäryhmän $(\mathbb{Z}_6/H, \oplus)$ alkiot.

78. Määrää edellisen tehtävän tekijäryhmän laskutoimitustaulukko.

79. Olkoon $f : G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Todista, että f on injektio jos ja vain jos sen ydin $\ker f = \{e\}$.

    Opastusta. Osoita, että $\{e\} \subseteq \ker f$ (helppo) ja $\ker f \subseteq \{e\}$ (ei vaikea).

80. Todista, että kuvaus $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$,

$$f(x) := 4x \bmod 12,$$

    on homomorfismi, ja etsi lähtöjoukon kuva sekä kuvauksen ydin.

    Vihje. Homomorfisuus: Käytä Lausetta 3.3.

81. Osoita, että $(\mathbb{Z}_n, +_n, *_n)$ on ykkösellinen ja vaihdannainen rengas.

    Opastusta. Käytä aikaisemmin todistettuja lauseita, osittelulait: avuksi Lause 3.3.

82. Todista Lause 9.11: Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas ja 0_R sen neutraalialkio. Silloin kaikilla $a \in R$ on $0_R \cdot a = 0_R$ ja $a \cdot 0_R = 0_R$.

83. Olkoon $(G, +)$ Abelin ryhmä, jonka nolla-alkio on 0. Määritellään $x \cdot y = 0$ kaikilla $x, y \in G$. Onko $(G, +, \cdot)$ rengas, kun joukossa G on vain yksi alkio?

84. Voidaan osoittaa, että joukko $S = \{a, b, c, d\}$ muodostaa renkaan $(S, +, \cdot)$, kun laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ on määritelty seuraavien taulukoiden avulla.

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	c

    a) Onko S vaihdannainen rengas?

    b) Määrää 0_S.

    c) Määrää käänteisalkiot yhteenlaskun suhteen.

    d) Onko rengas S ykköselllinen?

85. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}$ uusi kertolasku säännöllä $a * b := 1$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Muodostavatko $\mathbb{Z}$, tavallinen yhteenlasku ja tämä uusi kertolasku $*$ renkaan?

b) Muodostavatko $\mathbb{Z}$, tavallinen yhteenlasku ja seuraava kertolasku: $a \dagger b := 0$ kaikilla a, $b \in \mathbb{Z}$, renkaan?

Opastusta. Käy läpi renkaan aksioomat tarpeellisin osin: $(\mathbb{Z}, +)$ on tunnetusti Abelin ryhmä, joten jäljelle jäävät kertolaskun ominaisuudet ja osittelulait.

86. Olkoon R rengas, ja olkoon $U(R)$ niiden renkaan R alkioiden joukko, joille on olemassa käänteisalkio renkaan kertolaskun $\cdot$ suhteen. Mitä ovat $U(\mathbb{Z})$, $U(\mathbb{Z}_{12})$ ja $U(\mathbb{Z}_7)$?

87. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}$ uusi yhteenlasku $\oplus$ ja uusi kertolasku $\odot$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} a \oplus b &:= a + b - 1, \\ a \odot b &:= a + b - ab. \end{aligned}$$

Osoita, että $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ on kokonaisalue.

88. Olkoon $(F, +, \cdot)$ kunta. Todista, että tällöin $(F \setminus \{0_F\}, \cdot)$ on Abelin ryhmä.

89. Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] := \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ on renkaan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alirengas.

90. Olkoon R kokonaisalue. Todista, että joukko

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in R \right\}$$

on matriisirenkaan $R^{2\times 2}$ alirengas. Onko se kokonaisalue? Entä kunta?

91. Määrää

$$\frac{2}{3} +_7 \frac{4}{6}$$

kunnassa $(\mathbb{Z}_7, +_7, *_7)$.

92. Ratkaise yhtälöpari $2x+3y = 2$ ja $4x-3y = -3$ kunnassa $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11}, *_{11})$.

93. Olkoot $(I_1, +, \cdot)$ ja $(I_2, +, \cdot)$ renkaan $(R, +, \cdot)$ ideaaleja.
Osoita, että $(I_1 \cap I_2, +, \cdot)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ ideaali.

94. Tutki onko kuvaus $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $f(a) = 2a$ homomorfismi renkaalta $\mathbb{Z}$ renkaalle $2\mathbb{Z}$.

95. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas ja $f : R \to R$ rengashomomorfismi. Olkoon

$$A = \{a \in R \mid f(a) = a\}.$$

Näytä, että $(A, +, \cdot)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ alirengas.

96. Sovella renkaan $\mathbb{Q}[x]$ polynomeihin $a(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$ ja $b(x) = x^2 - 2$ jakoalgoritmia ja määritä jakoyhtälön mukaiset polynomit $q(x)$ ja $r(x)$.

97. Osoita, että $x^2 - 2$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$.