Analysis IV
Spring 2011
Exercises 1 / Answers / Suomeksi

---

(1) Olkoon $\{x_1, \dots, x_n\}$ lineaarisesti riippumaton joukko avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreita. Näytä että jokaisella $x \in \mathbb{R}^n$ on enintään yksi muotoa $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ oleva esitys. ($x_1, \dots, x_n$ ovat joku lin. riippumaton joukko.)

* * *

Oletetaan että on kaksi esitystä, joiden kertoimet ovat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ja $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ siten, että

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

ja

$$x = \lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_n x_n.$$

Silloin

$$0 = x - x = (\lambda_1 - \lambda'_1)x_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n)x_n,$$

ja koska $x_1, \dots, x_n$ ovat lineaarisesti riippumaton joukko, tästä seuraa että $\lambda_i - \lambda'_i = 0$ jokaiselle $i = 1, \dots, n$. Siispä $\lambda_i = \lambda'_i$ jokaiselle $i = 1, \dots, n$. Tämä on ristiriita (*contradiction*), koska λ ja λ' olivat *eri* esityksiä.

(2) Todista lineaarinen aliavaruustesti (Theorem 1.3).

* * *

Theorem 1.3 (Subspace test) Let V a vector space (over $\mathbb{F}$) and let $U \subset V$ be a non-empty set. Then U is a linear subspace of V if and only if $\alpha x + \beta y \in U$ for all $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ and all $x, y \in U$.

Tämä on jos-ja-vain-jos-todistus *if-and-only-if*; pitää todistaa molempiin suuntiin. (Muita sanoja: *non-empty* epätyhjä, *vector space* vektoriavaruus (d'oh!).) Skalaareista ja laskutoimituksista katso alaviite[1].

Ensin (”⇒”) olkoon U V:n lineaarinen aliavaruus. Tämä tarkoittaa määritelmän nojalla sitä että U on vektoriavaruus, joten

---

[1]Eli: skalaari kertaa vektori antaa vektorin; tästä tutuin tilanne on esim. $2 \times (1, 2, 3) = (2, 4, 6)$.

Vektoriavaruuksissa ei oteta mukaan mitään vektorien kertomista vektoreilla, vaan vain skalaarikertolasku ja vektorien yhteenlasku. (Sana ”skalaari” tarkoittaa suunnilleen ”suuruuslukua” eli kerrointa; vertaa eng. sana *scale*.)

Yhteenlaskusta ”seuraa” nolla-alkio, koska nollaksi kutsutaan sitä joka ei yhteenlaskussa muuta sitä johon se lisätään. Reaaliluvuilla tämä on 0; $\mathbb{R}^2$-vektoreilla $(0, 0)$.

”Ykkösvektoria” ei tarvitse etsiä, sillä ykkösvektori ”seuraisi” vektorien kertalaskusta: se on se jolla kerrottaessa mikään ei muutu. Koska meillä on skalaarikertolasku, niin ykkös-skalaari tarvitaan; mutta koska skalaarit ovat meillä aina joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$ niin tiedetään että ykkös-skalaari on $1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

skalaarikertolasku pysyy U:ssa, so. jos $x \in U$, niin $\alpha u \in U$ jokaisella $\alpha \in \mathbb{F}$. Samoin U:n alkioiden yhteenlasku pysyy U:ssa, eli jos $\alpha x, \beta y \in U$, niin $\alpha x + \beta y \in U$.

Toiseksi (”$\Leftarrow$”), oletetaan (*suppose*, olettaa) että $\alpha x + \beta y \in U$ kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ja kaikilla $x, y \in U$. Sen näyttämiseksi että U on vektoriavaruus samalla kerto- ja yhteenlaskulla kuin V, pitää käydä läpi vektoriavaruuden ominaisuuksien pitkä lista; katso sitä luennoista. Suurin osa ominaisuuksista on selviä, sillä jos jokin pätee kaikille V:n alkioille se pätee kaikille U:n alkioille sillä $U \subset V$. Erityistä päättelyä tarvitaan niiltä osin kuin kyse on siitä kuuluuko jokin alkio U:hun:

1) Ensinnäkin, ovatko yhteen- ja kertolasku U:ssa pysyviä laskutoimituksia? Kyllä, koska sitä ehto $\alpha x + \beta y \in U$ tarkoittaa. Jos $\alpha = \beta = 1$ niin $x + y \in U$, joten yhteenlasku pysyy U:ssa. Jos $\beta = 0$ niin $\beta y = 0$ riippumatta siitä mitä y on, joten saadaan $\alpha x \in U$.

2) Onko U:ssa nolla-alkio? (*element* on ”elementti”, tässä yhteydessä alkio. *Zero e., inverse e.* ovat nolla- ja käänteisalkiot.) Koska $\alpha x + \beta y \in U$ kaikilla α, β, x, y, voidaan valita $\alpha = \beta = 0$, ja saadaan

$$0x + 0y = 0 + 0 = 0 \in U.$$

Näin ollen U:ssa on nolla-alkio, koska V:n nolla-alkio kuuluu U:hun, ja koska se täyttää nolla-alkio-ominaisuuden $x + 0 = x$ kaikilla $x \in V$ niin sama ominaisuus pätee kaikille $x \in U$.

3) Ovatko käänteisalkiot (alkioille $x \in U$) U:ssa? Kertolasku pysyy U:ssa, joten $(-1)x \in U$. Koska (käytetään V:ltä perittyjä vektoriavaruuden ominaisuuksia)

$$x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0$$

niin jokaisella $x \in U$ on käänteisalkio $-x$.

(3) Näytä että joukko $F(S, V)$ (Definition 1.5) on vektoriavaruus.

* * *

Koska V on vektoriavaruus, niin vektoriavaruuksien ominaisuudet pätevät jokaiselle yksittäiselle V:n pisteelle. Koska $F(S, V)$:n alkiot ovat funktioita joiden arvot ovat V:ssä, niin vektoriavaruuden ominaisuudet pätevät funktioiden yksittäisille arvoille, joten myös itse funktioille. Esimerkiksi jos $x \in S$ on kiinnitetty (fiksattu, whatever), niin $f(x) \in V$ ja $g(x) \in V$, joten $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$. Koska tämä pätee jokaiselle $x \in S$, niin funktioille $f \in F(S, V)$ ja $g \in F(S, V)$ pätee $f + g = g + f$.

Ominaisuudet (a), (d) ja (e) ovat tälle selvät.

Nolla-alkio (omaisuus (b)) oli luennoissa.

Käänteisalkiot (ominaisuus (c)) seuraa näin: Jos $x \in S$ on kiinnitetty, niin pisteellä $f(x) \in V$ on (V-avaruuden) käänteisalkio $-f(x)$; ja koska tällainen alkio on jokaiselle $x \in S$, niistä yhdessä muodostuu ($F(S, V)$-avaruuden) käänteisalkio(funktio) $-f$.

(4) Näytä että jos $S = \{1, \ldots, k\}$, niin $F(S, \mathbb{F})$ on tavallaan sama kuin $\mathbb{F}^k$.

* * *

Nyt $F(S, \mathbb{F})$ on kaikkien funktioiden $f : S \to \mathbb{F}$ joukko; se sisältää kaikki tavat yhdistää kukin S:n k:sta alkiosta johonkin $\mathbb{F}$:n alkioon. ($\mathbb{F}$ on $\mathbb{R}$ eli reaaliluvut tai $\mathbb{C}$ eli kompleksiluvut) Tällainen funktio on k:n $\mathbb{F}$:n alkion "pätkä", eli k:n mittainen $\mathbb{F}$-vektori, eli $\mathbb{F}^k$:n alkio.

Esimerkki. Olkoon $k = 3$ ja $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Tällöin yksi funktio $F(S, \mathbb{F})$ on $f(1, 2, 3) = (0, 42, 23)$; toinen voisi olla vaikkapa $g(1, 2, 3) = (6, 6, 11)$, ja kolmas $h(1, 2, 3) = (0, 0, 7)$. Voi vaikka ajatella että S:n alkiot ovat "tämä osoittaa vektorin ensimmäistä alkiota", "tämä toista", ja "tämä kolmatta". On aika ilmeistä että tämä on "tavallaan sama" kuin $\mathbb{R}^3$.

(5) Näytä että kuvaus $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y, z) = (y + z, x),$$

on lineaarinen. (Tätä merkitään $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$).

* * *

Kuvaus T on lineaarinen jos $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$. Jos tämä F on lineaarinen, niin pitäisi päteä että F:n arvo pisteessä $\alpha(x, y, z) + \beta(a, b, c)$ on sama kuin α kertaa $F(x, y, z)$ plus β kertaa $F(a, b, c)$. Elikkä:

$$\begin{aligned} &F(\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b, \alpha z + \beta c) \\ &= \alpha F(x, y, z) + \beta F(a, b, c). \end{aligned}$$

Tässä vasen (ensimmäinen) puoli (*left-hand side*) on

$$(\alpha y + \beta b + \alpha z + \beta c, \alpha x + \beta a),$$

ja oikea (toinen) puoli (*right-hand side*) on

$$\begin{aligned} &\alpha(y + z, x) + \beta(b + c, a) \\ =&(\alpha y + \alpha z, \alpha x) + (\beta b + \beta c, \beta a) \\ =&(\alpha y + \alpha z + \beta b + \beta c, \alpha x + \beta a), \end{aligned}$$

mikä on sama vektori.

(6) Todista Schwarzin epäyhtälö (*Schwarz inequality*): Jos $a_j, b_j \in \mathbb{F}$ for all $j = 1, \ldots, k$, niin

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |a_j||b_j|\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{k} |b_j|^2.$$

* * *

(Aika monta todistusta.)

Tarkastellaan hatusta vetäistyä summaa

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_i||b_j| - |a_j||b_i|)^2.$$

Ensinnäkin, se on neliöiden (toisten potenssien) summa, joten se ei ole negatiivinen.[2] Toisena, tämä summa voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_i|^2|b_j|^2 + |a_j|^2|b_i|^2 - 2|a_i||a_j||b_i||b_j|) \\
=&\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2 + \sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right. \\
&\left. -2\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|\sum_{j=1}^{n}|a_j||b_j|\right).
\end{aligned}$$

Tämä puolestaan voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{k} |b_j|^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j||b_j|\right)^2.$$

Näin ollen

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{k} |b_j|^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j||b_j|\right)^2 \geq 0,$$

josta tulos seuraa.

[2]Väännetään rautalangasta. Jos $x \in \mathbb{C}$ tai $\mathbb{R}$, niin $|x| \in \mathbb{R}$. Kun $|x| \in \mathbb{R}$, niin $|x|^2 \geq 0$. Tällöin $\sum |x|^2 \geq 0$.