Analysis IV
Spring 2011
Exercises 2 / Answers / Suomeksi, lyhyesti

(1) Olkoon ℓ^1 niiden äärettömien jonojen (*infinite sequences*) $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_n \in \mathbb{C}$, joukko joille

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty.$$

Näytä että ℓ^1 varustettuna yhteenlaskulla $x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\}$ ja skalaarikertolaskulla $\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, on vektoriavaruus. (Skalaareina on $\mathbb{C}$.)

* * *

Samaa kuin viime viikolla. Aukeaa englanninkielisesti ilman sen suurempia selityksiä. Tässä sen sijaan muutama hyödyllinen sana —

- *likewise; since; therefore* :
  myös, samoin, samalla tavalla; koska; näin ollen
- *associative, associativity* :
  liitännäinen, liitännnäisyys
- *commutative, commutativity* :
  vaihdannainen, vaihdannaisuus
- *addition, substraction, multiplication, division* :
  yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku;
  josta samoin *to add, to substract, to multiply, to divide*, lisätä, vähentää, kertoa ja jakaa
  (mutta *additive* additiivinen; ks. luentojen luku 2)
- *sum, product, nominator, denominator, remainder* :
  summa, tulo, jaettava, jakaja, jakojäännös
- *natural numbers* ($\mathbb{N}$), *integers* ($\mathbb{Z}$), *rational numbers* ($\mathbb{Q}$), *real numbers* ($\mathbb{R}$), *complex numbers* ($\mathbb{C}$) :
  luonnolliset luvut ($\mathbb{N}$) kokonaisluvut ($\mathbb{Z}$), rationaaliluvut (murtoluvut) ($\mathbb{Q}$), reaali- ($\mathbb{R}$) ja kompleksiluvut ($\mathbb{C}$); joskus sanotaan ”puhekielisesti” *the reals*, *the rationals*, jne.
- *countable, countably, countability; uncountable* :
  numeroituva, numeroituvasti, numeroituvuus; ylinumeroituva

- *unique, at least, at most, invariant, disjoint* :
yksikäsitteinen, vähintään, enintään, invariantti (muuttumaton, yleensä jonkun suhteen), pistevieras ("eivät sisällä samoja pisteitä")
- *inverse, property, induction* :
käänteis-jokin (*i. element, i. matrix* ovat käänteisalkio ja -matriisi), ominaisuus, induktio
- *set, sequence, element; union, intersection, difference, closure* :
joukko, jono, alkio; yhdiste, leikkaus, erotus, sulkeuma
- *space* :
avaruus eli "joukko jossa on jonkinlainen rakenne", esim. vektoriavaruudessa joukon alkioilla keskinäisiä "yhteyksiä" joita kutsutaan yhteenlaskuksi ja muutama muu rakenneominaisuus
- *clearly, trivially* :
selvästikin, triviaalisti eli "helposti pelkästään laskien"; matemaattinen helpon käsitys voi erota hieman arkielämän vastaavasta
- *sequence, subsequence, converge, convergent, limit* : jono, osajono, supeta, suppeneva, raja-arvo
(yleisemmin *sub* on ali- tai osa-jotain, ja *super* yli- tai yläjotain; voidaan sanoa että "*By* $A \subset B$ *we mean that* A *is a subset of* B *and* B *is a superset of* A".)
- *metric, triangle inequality, equation, equality* :
metriikka / metrinen, kolmioepäyhtälö, yhtälö, yhtäsuuruus
- *complete, dense, compact, (outer) measure* :
täydellinen, tiheä, kompakti, (ulko)mitta; niitä sanoja joilla on matematiikassa aivan oma merkityksenä; ks. Def. 1.15, 1.18, 1.23
- *converse* :
käänteinen (*We have now shown* $A \Rightarrow B$*; the converse is trivial*, olemme näyttäneet että $A \Rightarrow B$; käänteinen väite eli $B \Rightarrow A$ on naurettavan helppo)
- *suppose, prove, show, counterexample, indirect proof, note, notation* :
oleta, todista, näytä, vastaesimerkki, epäsuora todistus, huomata/huomauttaa/huomautus, notaatio eli merkintä(tapa)
(*Because we don't want to write* f'''' *for the fourth derivative all the time, we use the notation* $f^{(4)}$*.*)

(2) Todista luentojen Lause (*theorem*) 1.13 (b) ja (c).

* * *

Theorem 1.13 Olkoon $\{x_n\}$ suppeneva jono (raja-arvona x) metrisessä avaruudessa (M, d). Tällöin:
(b) jokainen jonon $\{x_n\}$ osajono suppenee kohti raja-arvoa x,
(c) $\{x_n\}$ on Cauchyn jono.

Proof: (b) Olkoon $\epsilon > 0$. Olkoon $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$. Koska $\{x_n\} \to x$, on olemassa $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten että $d(x_n, x) < \epsilon$ kaikilla $n \geq N_\epsilon$. Koska $\{x_{n_j}\}$ on jonon x_n osajono, on olemassa $j_N \in \mathbb{N}$ siten, että $n_j > N$ kaikilla $j > j_N$, ja, näin ollen, $d(x_{n_j}, x) < \epsilon$.

(c) Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $\{x_n\}$ suppenee kohti raja-arvoa x, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_n, x) < \epsilon/2$$

kaikilla $n \geq N$. Näin ollen kaikilla $n, m \geq N$ pätee

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

(3) Näytä että funktio $d : \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{R}$,

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$$

on metriikka.

(Kun puhe on ℓ^1:stä tai muista jonoista, seuraavat merkinnät tarkoittavat samaa, ja niitä käytetään aika sattumanvaraisesti sekaisin: x, $\{x_n\}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Pelkkä x_n on kuitenkin vain jonon n:s alkio, eikä koko jono. Ja koska jono on kokoelma pisteitä voidaan kirjoittaa esim. $\{1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.)

* * *

Tulee näyttää seuraavien ehtojen pätevän:
(a) $d(x, y) \geq 0$
(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(c) $d(x, y) = d(y, x)$
(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (kolmioepäyhtälö)
Nämä ovat selviä; ks. englanninkielinen mallivastaus.

(4) Olkoon $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (M, d). Todista (*prove*) että on olemassa luku $R > 0$ siten, että $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_d(x_1, R)$.

* * *

Koska $\{x_n\}$ on Cauchyn jono, niin on olemassa $N_1 \in \mathbb{N}$ siten että $d(x_n, x_m) < 1$ kaikilla $m, n \geq N_1$, ja erityisesti

$$d(x_{N_1}, x_m) < 1$$

kaikilla $m \geq N_1$. Valitaan $M_1 := d(x_1, x_{N_1}) + 1$, ja nähdään että kolmioepäyhtälön nojalla kaikilla $n \geq N_1$ pätee

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_n) < d(x_1, x_{N_1}) + 1 = M_1.$$

Koska jonossa on $N_1 - 1$ pistettä ennen pistettä x_{N_1}, eli pisteitä on äärellisen monta, voidaan sanoa että

$$M_2 := \max_{1 \leq n \leq N_1 - 1} d(x_1, x_n) < \infty.$$

Näin ollen jokaiselle x_n pätee

$$d(x_1, x_n) < \max(M_1, M_2).$$

Tämä taas tarkoittaa sitä että jokainen x_n on x_1-keskisen R-säteisen pallon sisässä, missä $R := \max(M_1, M_2)$; eli $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_d(x_1, R)$.

(5) Olkoon $\{a_n\}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (M, d). Todista: Jos jonolla $\{a_n\}$ on osajono (*subsequence*) joka suppenee kohti (*converges to*) lukua $a \in M$, niin $\{a_n\}$ suppenee kohti lukua a.

* * *

Olkoon $\{a_{n_j}\}$ jonon $\{a_n\}$ suppeneva osajono, ja olkoon $\epsilon > 0$. Näytetään että on olemassa $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten että

$$d(a_n, a) < \epsilon$$

kaikilla $n \geq N_\epsilon$.

Koska $\{a_n\}$ on Cauchyn jono, on olemassa $N_2 \in \mathbb{N}$ siten että $d(a_n, a_m) < \epsilon/2$ kun $n, m \geq N_2$.

Koska $\{a_{n_j}\}$ suppenee kohti pistettä a, on olemassa $N_1 \in \mathbb{N}$ siten että $a_{N_1} \in \{a_{n_j}\}$, $d(a_{N_1}, a) < \epsilon/2$ ja $N_1 \geq N_2$.

Näin ollen jokaiselle $n > N =: \max(N_1, N_2)$ meillä on, kolmioepäyhtälöä käyttäen,

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_{N_1}) + a(a_{N_1}, a) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$