Analysis IV
Spring 2011
Exercises 2 / Suomeksi

(1) Olkoon ℓ^1 niiden äärettömien jonojen (*infinite sequences*) $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_n \in \mathbb{C}$, joukko joille

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty.$$

Näytä että ℓ^1 varustettuna yhteenlaskulla $x+y = \{x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots\}$ ja skalaarikertolaskulla $\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, on vektoriavaruus. (Skalaareina on $\mathbb{C}$.)

(2) Todista luentojen Lause (*theorem*) 1.13 (b) ja (c).

(3) Näytä että funktio $d : \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{R}$,

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$$

on metriikka. (Kun puhe on ℓ^1:stä tai muista jonoista, seuraavat merkinnät tarkoittavat samaa, ja niitä käytetään aika sattumanvaraisesti sekaisin: x, $\{x_n\}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_1, x_2, \ldots\}$.)

(4) Olkoon $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (M, d). Todista (*prove*) että on olemassa luku $R > 0$ siten, että $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_d(x_1, R)$.

(5) Olkoon $\{a_n\}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (M, d). Todista: Jos jonolla $\{a_n\}$ on osajono (*subsequence*) joka suppenee kohti (*converges to*) lukua $a \in M$, niin $\{a_n\}$ suppenee kohti lukua a.