Analysis IV
Spring 2011
Exercises 3 / Answers / Suomeksi

(1) Olkoon (E, d) metrinen avaruus ja olkoon $x \in E$, $A \subset E$. Määritellään

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Osoita että $\{x \mid d(x, A) = 0\} = \overline{A}$.

$* * *$

Joukon A sulkeuma on pienin suljettu joukko joka sisältää A:n.

$\boxed{\text{"}\subset\text{"}}$: Olkoon $x \in E$ siten että $d(x, A) = 0$ ja $x \notin \overline{A}$. Koska $\overline{A}$ on suljettu, $E \setminus \overline{A}$ on avoin, ja $x \in E \setminus \overline{A}$. Näin ollen on olemassa säde $r > 0$ siten että $x \in B(x, r) \subset E \setminus \overline{A}$. Tämä tarkoittaa että $d(x, A) \geq r$, joka on ristiriita. Näin ollen $\{x \mid d(x, A) = 0\} \subset \overline{A}$.

Ylläoleva on saatu englanninkielisestä vastauksesta korvaamalla sen sanat suomenkielisillä, vaihtamatta niiden järjestystä tai paikkoja matemaattisten merkkien seassa; sen vaikeampaa ei englanninkielinen matematiikka ole. (No, pitää tietää monta sanojen "täten", "näin ollen" ja "tästä seuraa" synonyymejä.) Todistus toiseen suuntaan on englanninkielisessä vastauksessa.

(2) Olkoon X ääretön joukko, so. joukko jossa on äärettömän monta alkiota. Olkoon $\mathbb{T}$ joukko johon kuuluvat seuraavat alkiot: $\emptyset$, X, ja kaikki joukot G joille $X \setminus G$ on äärellinen joukko. Todista että $(X, \mathbb{T})$ on topologinen avaruus.

$* * *$

Tiedetään että $(X, \mathbb{T})$ on topologinen avaruus jos:

(a) $\boxed{\emptyset \in \mathbb{T} \text{ and } X \in \mathbb{T}.}$ (Selvä.)

(b) $\boxed{\text{(mielivaltaisten joukon } \mathbb{T}\text{) joukkojen yhdiste pysyy joukossa } \mathbb{T}.}$

Olkoon $G_i \in \mathbb{T}$, $i = 1, 2, \ldots$. Tällöin $X \setminus G_i$ on äärellinen (sisältää äärellisen monta alkiota) jokaisella G_i, ja näin ollen

$$X \setminus \left(\bigcup_i G_i \right) = \bigcap_i (X \setminus G_i)$$

on myös äärellinen, ollen äärellisten joukkojen leikkaus.

(c) $\boxed{\text{kahden (joukoon } \mathbb{T} \text{ kuuluvan joukon) leikkaus pysyy joukossa } \mathbb{T}.}$

Jos $X \setminus G_1$ ja $X \setminus G_2$ ovat äärellisillä joillekin joukoille $G_1, G_2 \in \mathbb{T}$, niin

$$X \setminus (G_1 \cap G_2) = (X \setminus G_1) \cup (X \setminus G_2)$$

on, kahden äärellisen joukon yhdisteenä, myös äärellinen. (Ja samaten tässäkin tehtävässä riitti vain kääntää sana sanalta englannista suomeksi, eikä tullut ongelmia!)

(3) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko jonka jokaisella pisteellä on ympäristö jossa on vain numeroituva määrä joukon A pisteitä. Näytä, että A on numeroituva. (Vihje: Lindelöfin peitelause)

$* * *$

Lindelöfin peitelause : Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva alipeite.

Meillä on jokaiselle pisteelle $x \in A$ ympäristö B_x siten että B_x sisältää vain numeroituvan määrän joukon A pisteitä. Olkoon T joukkojen B_x muodostama joukko. Tällöin T on joukon A peite. Koska ympäristöt ovat avoimia joukkoja, T on joukon A avoin peite, ja Lindelöfin lauseen nojalla sillä on numeroituva alipeite. Olkoon tämän alipeitteen joukot T_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$. (Jokaiselle T_i pätee $T_i = B_x$ jollekin $x \in A$.) Koska jokaisessa joukossa T_i on vain numeroituvan monta joukon A pistettä, noita pisteitä voidaan merkitä $t_{i,j}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Koska

$$A = \bigcup_{i,j\, \in\, \mathbb{N}} \{t_{i,j}\},$$

A on numeroituva.

(Joskus puhutaan alipeitteistä, joskus osapeitteistä — sama asia.)

(4) Todista, että pistevieraiden avoimien $\mathbb{R}^n$:n osajoukkojen kokoelma on aina joko äärellinen tai numeroituva.

$* * *$

Olkoon G (ei välttämättä numeroituva) kokoelma pistevieraita avoimia joukkoja $G_i \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin G on joukon $\cup_i G_i$ avoin peite, ja Lindelöfin peitelauseen nojalla peitteellä G on numeroituva alipeite. Mutta koska joukot G_i ovat pistevieraita, ainoa mahdollinen "alipeite" on G itse, joten G on (enintään) numeroituva.

(5) Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ jatkuva reaaliarvoinen funktio jossain metrisessä avaruudessa X. Olkoon $\mathbb{Z}(f)$ niiden pisteiden $p \in X$ joukko joille $f(p) = 0$. Näytä että $\mathbb{Z}(f)$ on suljettu.

$* * *$

Määritelmän mukaan $\mathbb{Z}(f)$ on suljettu jos sen komplementti $X \setminus \mathbb{Z}(f)$ on avoin. Olkoon $p \in X \setminus \mathbb{Z}(f)$. Tällöin $f(p) \neq 0$. Koska f on jatkuva, on olemassa $\delta > 0$ siten että

$$|f(p) - f(y)| < f(p)/2 \tag{1}$$

kun $d(y, p) < \delta$. Epäyhtälöstä (1) saamme / näemme / päättelemme / arvaamme että $f(y) \neq 0$ jos $d(y, p) < \delta$. Koska mielivaltaiselle $p \in X \setminus \mathbb{Z}(f)$ on ympäristö $B_d(p, \delta) \subset X \setminus \mathbb{Z}(f)$, päättelemme että $X \setminus \mathbb{Z}(f)$ on avoin, joten $\mathbb{Z}(f)$ on suljettu.