Analysis IV
Spring 2011
Exercises 3 / Suomeksi

(1) Olkoon (E, d) metrinen avaruus ja olkoon $x \in E$, $A \subset E$. Määritellään
$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$
Osoita että $\{x \mid d(x, A) = 0\} = \overline{A}$.

(2) Olkoon X ääretön joukko, so. joukko jossa on äärettömän monta alkiota. Olkoon $\mathbb{T}$ joukko johon kuuluvat seuraavat alkiot: $\emptyset$, X, ja kaikki joukot G joille $X \setminus G$ on äärellinen joukko. Todista että $(X, \mathbb{T})$ on topologinen avaruus.

(3) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko jonka jokaisella pisteellä on ympäristö jossa on vain numeroituva määrä joukon A pisteitä. Näytä, että A on numeroituva. (Vihje: Lindelöfin peitelause)

(4) Todista, että pistevieraiden avoimien $\mathbb{R}^n$:n osajoukkojen kokoelma on aina joko äärellinen tai numeroituva.

(5) Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ jatkuva reaaliarvoinen funktio jossain metrisessä avaruudessa X. Olkoon $\mathbb{Z}(f)$ niiden pisteiden $p \in X$ joukko joille $f(p) = 0$. Näytä että $\mathbb{Z}(f)$ on suljettu.