Analysis IV
Spring 2011
Exercises 4 / Answers / Suomeksi

---

(1) Olkoon $0 < a < 1$. Oletetaan tiedetyksi että funktiojono $f_n(x) = nx(1-x)^n$ suppenee kohti funktiota $f(x) = 0$ kun $n \to \infty$. Onko suppeneminen tasaista (*uniform*) välillä $[a, 1]$? Entä välillä $[0, 1]$?

$* * *$

Sanotaan että funktiot f_n suppenevat tasaisesti kohti funktiota f jos

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in M\} \to 0 \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Tässä tehtävässä tarkastellaan tapauksia $M = [a, 1]$, $0 < a < 1$, ja $M = [0, 1]$. Tutkitaan funktiota $|f_n(x) - f(x)|$ ja etsitään sen ääriarvot. Tämä tutkiminen löytyy englanninkielisesti lapusta; siinä ei ole mitään matemaattisesti ihmeellistä joten sen kielen ei pitäisi olla isokaan ongelma.

Tuloksina saadaan että $|f_n(x) - f(x)|$ saa ääriarvonsa joissakin pisteistä $x = a$ ($x = 0$ tapauksessa $[0, 1]$), $x = 1$ ja $x = 1/(n + 1)$. Kun $n \to \infty$, näistä kahdessa ensimmäisessä tuo arvo menee nollaan, ja kolmas piste liukuu kohti nollaa, pois väliltä $[a, 1]$ millä tahansa kiinnitetyllä luvulla a. Näin ollen tapauksessa $M = [a, 1]$ ääriarvo on 0, ja suppeneminen on tasaista. Tapauksessa $M = [0, 1]$ ääriarvo on

$$\begin{aligned} &\left| f_n\left(\frac{1}{1+n}\right) - f\left(\frac{1}{1+n}\right) \right| \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to e^{-1} \neq 0 \quad \text{kun } n \to \infty, \end{aligned}$$

joten suppeneminen ei ole tasaista.

(2) Todista: Jos $m^*(B) = 0$, niin $m^*(A \cup B) = m^*(A)$.

$* * *$

Käyttäen subadditiivisuutta saadaan

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(A).$$

Koska $A \cup B \supset A$, niin monotonisuutta käyttäen saadaan $m^*(A \cup B) \geq m^*(A)$. Yhdistämällä nämä saadaan haluttu tulos.

(3) Todista Korollaari 2.4: Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva, niin $m^*(A) = 0$.

$*\ *\ *$

Koska A on numeroituva, se voidaan kirjoittaa

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}.$$

Koska m^* on subadditiivinen, niin

$$0 \leq m^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0.$$

(4) Todista Lause 2.6: Ulkomitta m^* on translaatioinvariantti (*translation invariant*), eli jos $a \in \mathbb{R}$, niin $m^*(A + a) = m^*(A)$ jokaisella $A \subset \mathbb{R}$.

$*\ *\ *$

Joukon E translaatio (siirto) luvun $a \in \mathbb{R}$ verran määritellään

$$a + E = \{a + x \mid x \in E\}.$$

Ulkomitta (*outer measure*) on määritelty

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_n l(I_n) \mid I_n \text{ ovat avoimia välejä siten että } A \subset \bigcup_n I_n \right\}.$$

Jos I_n ovat sellaisia välejä että $A \subset \cup_n I_n$, niin $A + a \subset \cup_n I_n + a$. Tämä tarkoittaa että mistä tahansa väleistä jotka ”käyvät” ulkomitan $m^*(A)$ määritelmän infimumiin saadaan a-siirrolla välit jotka ”käyvät” ulkomittaa $m^*(A+a)$ varten. Jos näin ollen ulkomitan $m^*(A+a)$ määräävässä infimumissa ovat ainakin yhtä pitkät väliyhdistelmät kuin ulkomitan $m^*(A)$ infimumissa, niin $m^*(A + a) \leq m^*(A)$.

Ja sama toisinpäin, joten $m^*(A + a) \geq m^*(A)$.

(5) Olkoon A välillä $[0, 1]$ olevien rationaalilukujen joukko. Olkoon $\{I_n\}$ äärellinen kokoelma avoimia välejä jotka peittävät joukon A. (Tahtoo sanoa että $A \subset \bigcup_{n=1}^{k} I_n$.) Todista että

$$\sum_n l(I_n) \geq 1.$$

$*\ *\ *$

Joko $[0,1] \subset \cup_n I_n$ tai sitten ei. Jos kyllä, niin

$$\begin{aligned}1 &= l([0,1]) = m^*([0,1]) \leq m^*(\cup_n I_n) \\ &\leq \sum_n m^*(I_n) = \sum_n m^*(I_n),\end{aligned}$$

ja tehtävä on tehty. Jos ei, niin on olemassa ainakin yksi piste $x \in [0,1]$ siten että $x \notin \cup_n I_n$. Koska mitään väli I_n ei peitä näitä pisteitä x, niin ne eivät ole rationaalipisteitä. Koska minkä tahansa kahden irrationaaliluvun välissä on rationaaliluku, niin minkä tahansa kahden pisteen x välillä on ainakin yksi väleistä I_n, joten nämä pisteet x ovat erillisiä.

Erillinen piste joka ei kuulu (äärellisen) välikokoelman I_n yhdisteeseen on kahden välin yhteinen päätepiste, eli joillekin i, j pätee $I_i =]a, x[$ ja $I_j =]x, b[$. Koska välejä I_n on äärellinen määrä, on tällaisia päätepisteitä äärellinen määrä, joten pisteitä x on vain äärellinen määrä. Korollaarin 2.4 nojalla näiden pisteiden pituus on nolla, joten

$$\begin{aligned}m^*([0,1]) &= m^*((\cup_n I_n) \cap [0,1]) + \underbrace{m^*(\cup\{x\})}_{=0} \\ &= m^*((\cup_n I_n) \cap [0,1]).\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}1 &= m^*((\cup_n I_n) \cap [0,1]) \leq m^*(\cup_n I_n) \\ &\leq \sum_n m^*(I_n) = \sum_n l(I_n).\end{aligned}$$