
Analysis IV

Spring 2011

Exercises 4

- (1) Olkoon $0 < a < 1$. Oletetaan tiedetyksi että funktiojono $f_n(x) = nx(1-x)^n$ suppenee kohti funktiota $f(x) = 0$ kun $n \rightarrow \infty$. Onko suppeneminen tasaista (*uniform*) välillä $[a, 1]$? Entä välillä $[0, 1]$?
- (2) Todista: Jos $m^*(B) = 0$, niin $m^*(A \cup B) = m^*(A)$.
- (3) Todista Korollaari 2.4: Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva, niin $m^*(A) = 0$.
- (4) Todista Lause 2.6: Ulkomitta m^* on translaatioinvariantti (*translation invariant*), eli jos $a \in \mathbb{R}$, niin $m^*(A + a) = m^*(A)$ jokaisella $A \subset \mathbb{R}$.
- (5) Olkoon A välillä $[0, 1]$ olevien rationaalilukujen joukko. Olkoon $\{I_n\}$ äärellinen kokoelma avoimia välejä jotka peittävät joukon A . (Tahtoo sanoa että $A \subset \bigcup_{n=1}^k I_n$.) Todista että

$$\sum_n l(I_n) \geq 1.$$