Analysis IV
Spring 2011
Exercises 5 / Answers / Suomeksi

(1) Olkoon Ω mielivaltainen joukko. Olkoon f funktio joka kuvaa joukon Ω osajoukot reaaliluvuille. Määritellään f olemaan

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{kun } A = \emptyset \text{, ja} \\ 1 & \text{muilla joukoilla.} \end{cases}$$

Näytä että f on monotoninen ja subadditiivinen, eli että
a) jos $A \subset B \subset \Omega$ niin $f(A) \leq f(B)$, ja
b) kaikille $A_i \subset \Omega$ pätee $f(\cup_i A_i) \leq \sum_i f(A_i)$.

* * *

Monotonisuus (*monotonicity*)[1]:

$$\boxed{\text{Jos } A \subset B \text{ niin } f(A) \leq f(B).}$$

- Siinä tapauksessa että $B = \emptyset$, niin $A = \emptyset$ ja $f(A) = 0 = f(B)$; monotonisuusehto pätee.
- Jos taas $B \neq \emptyset$, niin $f(B) = 1$, ja $f(A) \leq 1 = f(B)$ kaikilla A. Monotonisuusehto pätee taas.

Subadditiivisuus (*subadditivity*):

$$\boxed{\text{Kaikille } A_i \text{ pätee } f(\cup_i A_i) \leq \textstyle\sum_i f(A_i).}$$

- Jos $\cup_i A_i = \emptyset$, niin $A_i = \emptyset$ jokaiselle i. Koska (selvästikin?) $0 \leq 0$, niin subadditiivisuusehto pätee.
- Jos taas $\cup_i A_i \neq \emptyset$, niin $A_i \neq \emptyset$ ainakin yhdelle i:n arvolle, joten $f(\cup_i A_i) = 1 \leq \sum_i f(A_i)$. Ehto pätee.

Jos tämä kurssi käsittelisi yleisempää mittateoriaa eikä vain $\mathbb{R}$:n (reaaliakselin) mittoja, määriteltäisiin yleinen ulkomitta. Se olisi mikä tahansa funktio ”mitattavan” avaruuden joukoilta reaaliluvuille, joka olisi (a) monotoninen, (b) subadditiivinen ja (c) kuvaisi tyhjän joukon nollalle; siis sellainen kuin tämän tehtävän funktio f. Sen avulla voitaisiin sitten määritellä mitta,

[1] Suomen ja englannin kielen lisäkurssi, osa $n \in \mathbb{N}$. Suomeksi sanotaan että f on monotoninen funktio (harvemmin: monotonifunktio), eli sillä on ominaisuus nimeltä monotonisuus, eli se käyttäytyy monotonisesti. (Kuten punainen, punaisuus, punaisesti.) *In English, we say that f is a monotone (or monotonic) function, has the property of monotonicity, and behaves in a monotone fashion (or monotonically).*

ja tehdä mittateoriaa hyvin samalla lailla kuin tällä kurssilla reaaliluvuille.[2]

(2) Olkoon f funktio. Määritellään sen positiivinen ja negatiivinen osa olemaan $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ ja $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$. Näytä että
a) $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$,
b) $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$ ja
c) $\frac{1}{2}(|f| + f) = f^+$.

* * *

Simppeliä laskentoa:

$$f^+(x) - f^-(x) = \left\{\begin{matrix} f(x) - 0 & \text{jos } f(x) \geq 0 \\ 0 - (-f(x)) & \text{jos } f(x) < 0 \end{matrix}\right\} = f(x).$$

Samalla lailla

$$f^+(x) + f^-(x) = \left\{\begin{matrix} f(x) + 0 & \text{jos } f(x) \geq 0 \\ 0 + (-f(x)) & \text{jos } f(x) < 0 \end{matrix}\right\} = |f(x)|.$$

Laskemalla edelliset tulokset puolittain yhteen saadaan

$$2f^+(x) - f^-(x) + f^-(x) = f(x) + |f(x)|,$$

ja kolmas tulos saadaan jakamalla tämä puolittain kahdella.

(3) Olkoon A ei-mitallinen joukko, ja olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in A \text{ ja} \\ -1 & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Onko f mitallinen funktio? Entä $|f|$?

* * *

Funktio f on mitallinen jos $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ on mitallinen joukko kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Valitaan $\alpha = 0$. Tällöin tämä joukko on

$$\{x \mid f(x) > 0\} = A,$$

ja koska tämän tiedetään olevan ei-mitallinen joukko, ei f ole mitallinen funktio.

Funktion f itseisarvo on funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ jos } x \in A \\ |-1| \text{ jos } x \notin A \end{cases} = 1$$

[2]OT:n muistin mukaan entinen Analyysi V piti sisällään tällaisen yleisen mittateorian ja oli inhimillisen siedettävä kun oli saanut päänsä Analyysi IV:n seinän läpi. Vastaavan kurssin nimi taitaa nykyisin olla Mitta- ja integroimisteoria.

eli pelkkä vakiofunktio. Nyt $\{x \mid |f(x)| > \alpha\}$ on, riippuen α:n arvosta, aina joko $\emptyset$ tai $\mathbb{R}$. Koska molemmat ovat mitallisia joukkoja, on $|f|$ mitallinen funktio.

(4) Luennoilla ilmoitettiin että

$$\begin{aligned}&\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\}\\ =&\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x \in E \mid f(x) > \alpha - 1/n\}.\end{aligned}$$

Todista tämä.

* * *

Tämä on helpointa näyttää osoittamalla, että vasen puoli on oikean puolen osajoukko, ja että oikea puoli on vasemman osajoukko.

"$\subset$" Olkoon $x \in E$ vasemman puolen alkio, eli olkoon $f(x) \geq \alpha$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Tällöin

$$f(x) \geq \alpha > \alpha - 1/n.$$

Näin ollen x kuuluu oikean puolen jokaiseen joukkoon, ja näin ollen myös niiden leikkaukseen.

"$\supset$" Olkoon $x \in E$ oikean puolen alkio, eli olkoon $f(x) > \alpha - 1/n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Tarkoittaako tämä sitä että $f(x) \geq \alpha$? Oletetaan että näin ei ole, vaan $f(x) = \alpha - h$, missä $h > 0$. Tällöin kuitenkin nähdään että

$$\alpha - 1/n > \alpha - h$$

kun $n > 1/h$, mikä on ristiriita. Niinpä $f(x) \geq \alpha$, ja x kuuluu vasemman puolen joukkoon.

Koska vasen ja oikea puoli ovat toistensa osajoukkoja, ne ovat täsmälleen sama joukko.

Luennoissa jätettiin harjoitustehtäväksi myös sen todistaminen, että

$$\{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in E \mid f(x) < \alpha + 1/n\}.$$

Tämän todistus on samanlainen kuin yllä: Jos $f(x) \leq \alpha$, niin $f(x) < \alpha + 1/n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja jos $f(x) < \alpha + 1/n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ niin antiteesin avulla nähdään että $f(x) \leq \alpha$.

(5) Luennoilla samaten ilmoitettiin että

$$\begin{aligned}&\{x \in E \mid (f+g)(x) < \alpha\}\\ =&\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in E \mid f(x) < r\} \cap \{x \in E \mid \alpha - g(x) > r\}.\end{aligned}$$

Todista tämäkin.

* * *

Todistetaan samoin kuin edellisessä tehtävässä että yhtälön vasen ja oikea puoli ovat toistensa osajoukkoja.

"$\subset$" Olkoon $x \in E$ siten, että $(f+g)(x) = f(x) + g(x) < \alpha$. Tällöin $f(x) < \alpha - g(x)$. Nyt x kuuluu yhtälön oikean puolen joukkoon, jos jollekin rationaaliluvulle r pätee $f(x) < r$ ja $r < \alpha - g(x)$. Koska $f(x) \neq \alpha - g(x)$, tiedetään että näiden kahden (reaali)luvun välissä on aina rationaaliluku, joten tällainen r on olemassa.

"$\supset$" Olkoon $x \in E$ siten, että jollekin rationaaliluvulle r pätee $f(x) < r$ ja $r < \alpha - g(x)$. Tällöin selvästikin $f(x) < \alpha - g(x)$, eli $f(x) + g(x) < \alpha$, joten x kuuluu yhtälön vasemman puolen joukkoon.