Analysis IV
Spring 2011
Exercises 5 / Suomeksi

---

(1) Olkoon Ω mielivaltainen joukko. Olkoon f funktio joka kuvaa joukon Ω osajoukot reaaliluvuille. Määritellään f olemaan

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{kun } A = \emptyset \text{, ja} \\ 1 & \text{muilla joukoilla.} \end{cases}$$

Näytä että f on monotoninen ja subadditiivinen, eli että
a) jos $A \subset B \subset \Omega$ niin $f(A) \leq f(B)$, ja
b) kaikille $A_i \subset \Omega$ pätee $f(\cup_i A_i) \leq \sum_i f(A_i)$.

(2) Olkoon f funktio. Määritellään sen positiivinen ja negatiivinen osa olemaan $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ ja $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$. Näytä että
a) $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$,
b) $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$ ja
c) $\frac{1}{2}(|f| + f) = f^+$.

(3) Olkoon A ei-mitallinen joukko, ja olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in A \text{ ja} \\ -1 & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Onko f mitallinen funktio? Entä $|f|$?

(4) Luennoilla ilmoitettiin että

$$\begin{aligned} &\{x \in E \mid f(x) \geq \alpha\} \\ = &\bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) > \alpha - 1/n\}. \end{aligned}$$

Todista tämä.

(5) Luennoilla samaten ilmoitettiin että

$$\begin{aligned} &\{x \in E \mid (f+g)(x) < \alpha\} \\ = &\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E \mid f(x) < r\} \cap \{x \in E \mid \alpha - g(x) > r\}. \end{aligned}$$

Todista tämäkin.