Analysis IV
Spring 2011
Exercises 6 / Answers / Suomeksi

(1) Näytä: Jos E_1 ja E_2 ovat mitallisia joukkoja, niin $E_1 \cup E_2$ on mitallinen.

Vihje. Jos E_2 on mitallinen, niin Määritelmän 2.7 ehto pätee esim. joukolle $A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1)$.

* * *

Joukon E sanotaan olevan mitallinen, jos jokaiselle muulle joukolle A pätee:[1]

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

Koska tahdotaan näyttää että $E_1 \cup E_2$ on mitallinen, täytyy näyttää että

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + m^*(A \setminus (E_1 \cup E_2)).$$

kaikille $A \subset \mathbb{R}$. Kuten yleensäkin, epäyhtälö "$\leq$" pätee subadditiivisuuden nojalla, joten riittää todistaa epäyhtälö "$\geq$".

Ensinnäkin, koska E_2 on mitallinen, joukolle $A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1)$, missä $A \subset \mathbb{R}$, pätee tämä:

$$\begin{aligned} &m^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1)) \\ &= m^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1) \cap E_2) \\ &\quad + m^*(\underbrace{(A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1)) \setminus E_2}_{=A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1) \cap (\mathbb{R} \setminus E_2)}). \end{aligned}$$

Toisena, koska $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap (\mathbb{R} \setminus E_1))$, subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned} &m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \\ &\leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap (\mathbb{R} \setminus E_1)). \end{aligned}$$

[1] Joissakin kirjoissa tämä ehto on muodossa $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E))$, joka on sama ehto eri lailla kirjoitettuna. Voi käyttää sitä muotoa mikä on omasta mielestä selkeämpi ja nätimpi.

Kolmantena, koska E_1 on mitallinen,

$$\begin{aligned}
&m^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \\
&\quad + m^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1) \cap (\mathbb{R} \setminus E_2)) \\
&\le m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap (\mathbb{R} \setminus E_1)) \\
&\quad + m^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1) \cap (\mathbb{R} \setminus E_2)) \\
&= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1) = m^*(A).
\end{aligned}$$

(2) Olettaen että avoin väli (a, ∞) on mitallinen kaikilla $a \in \mathbb{R}$, näytä että kaikki reaalilukuvälit ovat mitallisia.

Vihje. Näytä tämä seuraaville välityypeille: $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, (a, b) ja $[a, b]$. On hyvä huomata Lauseen 2.12 kohta joka sanoo että mitallisten joukkojen numeroituvat leikkaukset ovat mitallisia. Sitä voi käyttää vaikka sitä ei olekaan todistettu; todistus alkaisi huomaamalla että koska

$$E_1 \cap E_2 = \mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus E_1) \cup (\mathbb{R} \setminus E_2)),$$

niin edellisen tehtävän ja Lauseen 2.8 nojalla $E_1 \cap E_2$ on mitallinen jos E_1 ja E_2 ovat mitallisia. Se että mitallisten joukkojen *numeroituvat* yhdisteet ja leikkaukset ovat mitallisia ei olisi harjoitustehtävän tai sen vihjeen tasoa.

* * *

Roydenin kirjan sivulla 59 näytetään että (a, ∞) on mitallinen kaikille $a \in \mathbb{R}$.

(a) Koska jokainen väli (a, ∞) on mitallinen, niiden komplementit, välit $(-\infty, a]$, ovat mitallisia.

(b) Koska jokainen väli $(-\infty, a]$ on mitallinen, niiden numeroituvat leikkaukset

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, a + 1/n] = (-\infty, a)$$

ovat mitallisia.

(c) Koska jokainen väli $(-\infty, a)$ on mitallinen, niiden komplementit, välit $[a, \infty)$, ovat mitallisia.

(d) Koska $(-\infty, b)$ ja (a, ∞) ovat mitallisia kaikille $a, b \in \mathbb{R}$, niin

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$$

on mitallinen. Tässä $a < b$.

(e) Samaten, välit

$$[b, a] = (-\infty, b] \cap [a, \infty)$$

ovat mitallisia.

(3) Oletetaan että joukot $E_n \subset \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ovat pistevieraita. Näytä että
$$m(\bigcup_n E_n) = \sum_n m(E_n).$$

Vihje. Todista induktiolla tämä äärelliselle määräälle joukkoja $E_1, \ldots, E_n$. Sitten huomaa että $\bigcup_{i=1}^n E_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ pätee jokaiselle n, ja käyttäen tätä hyväksesi saa väite pätemään numeroituvalle määrälle joukkoja $E_1, E_2, \ldots$.

* * *

1. Todistus tapaukselle $n = 1, 2, \ldots, N$, induktiolla. Jos $N = 1$, selvästikin
$$m(\bigcup_{n=1}^{1} E_n) = m(E_1) = \sum_{n=1}^{1} m(E_n).$$
Oletetaan että väite pätee arvolla $n = N - 1$. Tapauksessa $n = N$, koska joukot E_n ovat pistevieraita,
$$\bigcup_{n=1}^{N} E_n \cap E_N = E_N$$
ja
$$\bigcup_{n=1}^{N} E_n \setminus E_N = \bigcup_{n=1}^{N-1} E_n.$$
Koska E_N on mitallinen joukko,
$$\begin{aligned} m^*(\bigcup_{n=1}^{N} E_n) &= m^*(\bigcup_{n=1}^{N} E_n \cap E_N) + m^*(\bigcup_{n=1}^{N} E_n \setminus E_N) \\ &= m^*(E_N) + m^*(\bigcup_{n=1}^{N-1} E_n) \\ &= m^*(E_N) + \sum_{n=1}^{N-1} m^*(E_n). \end{aligned}$$

2. Mille tahansa äärelliselle n pätee
$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) = m(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leq m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i).$$

Koska oikea puoli ei riipu luvusta n, sama pätee kun $n \to \infty$, joten

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \leq m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i).$$

Vastakkainen epäyhtälö seuraa subadditiivisuudesta.

(4) Olkoon f ja g mitallisia funktioita. Näytä että $\max\{f,g\}$ on mitallinen funktio.

$* * *$

Koska f ja g ovat mitallisia, $f-g$ on mitallinen (Lause 2.17).
Koska $f-g$ on mitallinen, $(f-g)^+$ on mitallinen.
Koska g ja $(f-g)^+$ ovat mitallisia, $g+(f-g)^+$ on mitallinen.
Ja koska

$$g+(f-g)^+ = g+\max\{f-g,0\} = \begin{cases} g+f-g & \text{if } f \geq g \\ g+0 & \text{if } f < g \end{cases} = \max\{f,g\},$$

niin $\max\{f,g\}$ on mitallinen.

(5) Olkoon $f : E \to \hat{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Näytä että $\{x \in E \mid f(x) = r\}$ on mitallinen joukko.

$* * *$

Joukot $\{x \mid f(x) \geq r\}$ ja $\{x \mid f(x) \leq r\}$ ovat mitallisia. Niiden leikkaus samaten.

11. Lemma: *The interval (a, ∞) is measurable.*

Proof: Let A be any set, $A_1 = A \cap (a, \infty)$, $A_2 = A \cap (-\infty, a]$. Then we must show $m^*A_1 + m^*A_2 \leq m^*A$. If $m^*A = \infty$, then there is nothing to prove. If $m^*A < \infty$, then, given $\epsilon > 0$, there is a countable collection $\{I_n\}$ of open intervals which cover A and for which

$$\sum l(I_n) \leq m^*A + \epsilon.$$

Let $I_n' = I_n \cap (a, \infty)$ and $I_n'' = I_n \cap (-\infty, a]$. Then I_n' and I_n'' are intervals (or empty) and

$$l(I_n) = l(I_n') + l(I_n'') = m^*I_n' + m^*I_n''.$$

Since $A_1 \subset \bigcup I_n'$, we have

$$m^*A_1 \leq m^*\left(\bigcup I_n'\right) \leq \sum m^*I_n',$$

and, since $A_2 \subset \bigcup I_n''$, we have

$$m^*A_2 \leq m^*\left(\bigcup I_n''\right) \leq \sum m^*I_n''.$$

Thus

$$\begin{aligned} m^*A_1 + m^*A_2 &\leq \sum (m^*I_n' + m^*I_n'') \\ &\leq \sum l(I_n) \leq m^*A + \epsilon. \end{aligned}$$

But ϵ was an arbitrary positive number, and so we must have $m^*A_1 + m^*A_2 \leq m^*A$. ∎