Analysis IV
Spring 2011
Exercises 6 / Suomeksi

---

(1) Näytä: Jos E_1 ja E_2 ovat mitallisia joukkoja, niin $E_1 \cup E_2$ on mitallinen.

Vihje. Jos E_2 on mitallinen, niin Määritelmän 2.7 ehto pätee esim. joukolle $A \cap (\mathbb{R} \setminus E_1)$.

(2) Olettaen että avoin väli (a, ∞) on mitallinen kaikilla $a \in \mathbb{R}$, näytä että kaikki reaalilukuvälit ovat mitallisia.

Vihje. Näytä tämä seuraaville välityypeille: $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, (a, b) ja $[a, b]$. On hyvä huomata Lauseen 2.12 kohta joka sanoo että mitallisten joukkojen numeroituvat leikkaukset ovat mitallisia. Sitä voi käyttää vaikka sitä ei olekaan todistettu; todistus alkaisi huomaamalla että koska

$$E_1 \cap E_2 = \mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus E_1) \cup (\mathbb{R} \setminus E_2)),$$

niin edellisen tehtävän ja Lauseen 2.8 nojalla $E_1 \cap E_2$ on mitallinen jos E_1 ja E_2 ovat mitallisia. Se että mitallisten joukkojen *numeroituvat* yhdisteet ja leikkaukset ovat mitallisia ei olisi harjoitustehtävän tai sen vihjeen tasoa.

(3) Oletetaan että joukot $E_n \subset \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ovat pistevieraita. Näytä että

$$m(\bigcup_n E_n) = \sum_n m(E_n).$$

Vihje. Todista induktiolla tämä äärelliselle määräälle joukkoja $E_1, \ldots, E_n$. Sitten huomaa että $\bigcup_{i=1}^n E_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ pätee jokaiselle n, ja käyttäen tätä hyväksesi saa väite pätemään numeroituvalle määrälle joukkoja $E_1, E_2, \ldots$.

(4) Olkoon f ja g mitallisia funktioita. Näytä että $\max\{f, g\}$ on mitallinen funktio.

(5) Olkoon $f : E \to \hat{\mathbb{R}}$ mitallinen funktio. Näytä että $\{x \in E \mid f(x) = r\}$ on mitallinen joukko.