Analysis IV
Spring 2011
Exercises 7 / Answers / Suomeksi (ei savoksi)

(1) Olkoon f mitallinen funktio ja $[a, b]$ reaaliväli. Osoita että joukko

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [a, b]\}$$

on mitallinen.

* * *

Koska $x \in [a, b]$ jos ja vain jos $x \geq a$ ja $x \leq b$, niin

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [a, b]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq a\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq b\}. \end{aligned}$$

(2) Todista Lause 2.26 (b'): If $f \geq g$ and $\int f\, dm$ exists and $\int f\, dm < \infty$, then $\int g\, dm$ exists and

$$\int f\, dm \geq \int g\, dm.$$

* * *

Todistus on hyvin paljon samanlainen kuin (b)-kohdassa.

Oletetaan että $f \geq g \geq 0$. Olkoon ϕ perusfunktio jolle $0 \leq \phi \leq g$. Tällöin $0 \leq \phi \leq f$, ja Määritelmän 2.24 nojalla

$$\int \phi\, dm \leq \int f\, dm.$$

Koska tämä pätee mille tahansa perusfunktiolle ϕ jolle $\phi \leq g$, tästä seuraa että

$$\int g\, dm = \sup\{\int \phi\, dm \mid \phi \text{ simple and } \phi \leq g\} \leq \int f\, dm$$

jokaiselle funktiolle f ja g. Koska $f \geq g$, niin $f^+ \geq g^+$ ja $f^- \leq g^-$. (Katso alaviite.[1]) Edelleen,

$$\int f^+ \, dm - \int f^- \, dm$$

on määritelty, sillä $\int f \, dm$ on olemassa. Koska $\int f \, dm < \infty$, niin $\int f^+ \, dm < \infty$, joten

$$\int g^+ \, dm \leq \int f^+ \, dm < \infty.$$

Näin ollen $\int g \, dm$ on olemassa, ja

$$\int g \, dm = \int g^+ \, dm - \int g^- \, dm \leq \int f^+ \, dm - \int f^- \, dm = \int f \, dm.$$

(3) Olkoon f ei-negatiivinen mitallinen funktio. Näytä että jos $\int f \, dm = 0$ niin $f = 0$ m.k. (melkein kaikkialla).

* * *

Oletetaan että väite ei päde: $\int f \, dm = 0$, mutta $f > 0$ jossakin joukossa $E \subset \mathbb{R}$ jolle $m(E) > 0$.

Voidaan olettaa että $f > a > 0$ jollekin $a \in \mathbb{R}$ jossain joukossa $A \subset E$ jolle $m(A) > 0$.[2] Tällöin $f \geq \phi$ perusfunktiolle

$$\phi(x) = \begin{cases} a, & x \in A \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

---

[1]Selvää kuvasta katsoen, mutta itse selitys on hankalampi kuin näin paljon asian esityksen olisi syytä olla. Muista että $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, ja samoin funktiolle g. Missä tahansa yksittäisessä pisteess x joko $f(x) = f^+(x)$ (kun $f(x) \geq 0$) tai $f(x) = -f^-(x)$ (kun $f(x) < 0$). Tarkastellaan tapausta $f(x) = f^+(x)$. Tässä pisteessä x joko $g(x) = g^+(x)$ tai $g(x) = -g^-(x)$. Ensimmäisessä tapauksessa, koska $f \geq g$ kaikkialla, niin $f^+(x) \geq g^+(x)$. Toisessa tapauksessa meillä pätee $g(x) < 0$, joten $g^+(x) = 0$, ja $f^+(x) \geq 0$. Toinen epäyhtälö tulee käsittelemällä tapausta $f(x) = -f^-(x)$ samalla lailla.

[2]"Voidaan olettaa" siksi että jos jokaiselle $a > 0$ joukko jossa $f > a$ pätisi olisi nollamittainen, niin voitaisiin sanoa

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) > 1/n\},$$

jolloin

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(\{x \in E \mid f(x) > 1/n\}) = 0.$$

Tämä olisi ristiriita, koska $m(E) > 0$.

Koska

$$\int \phi\, dm = a\, m(A) > 0,$$

niin Lauseen 2.26(d) nojalla

$$\int f\, dm = \sup\left\{ \int \phi\, dm \mid \phi \text{ perusfunktio jolle } \phi \le f \right\} \ge a\, m(A) > 0,$$

mikä on ristiriita.

(4) Olkoon f mitallinen funktio. Näytä että jos E on mitallinen joukko siten että $m(E) = 0$, niin $\int_E f\, dm = 0$.

Vihje. Todista tämä ensin yksinkertaisille (*simple*) funktioille. Sitten sen avulla funktioille f joille $f \ge 0$; katso Lause 2.26(d). Sitten huomaa että $f = f^+ - f^-$.

* * *

1. Olkoon $m(E) = 0$ ja olkoon f perusfunktio, se on, olkoon

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}(x)$$

joillekin $A_j \subset \mathbb{R}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Määritelmän nojalla $\int_E f\, dm$ on

$$\int_E f\, dm = \int f \chi_E\, dm = \sum_{j=1}^{n} a_j m(A_j \cap E).$$

Koska $m(E) = 0$ ja $A_j \cap E \subset E$ jokaiselle j, meillä pätee $m(A_j \cap E) = 0$ jokaiselle j, joten

$$\sum_{j=1}^{n} a_j m(A_j \cap E) = 0.$$

2. Olkoon $m(E) = 0$ ja olkoon f ei-negatiivinen funktio. Lauseen 2.26(d) nojalla

$$\int_E f\, dm = \sup\left\{ \int_E \phi\, dm \mid \phi \text{ perusfunktio jolle } \phi \le f \right\}.$$

Koska $\int_E \phi\, dm = 0$ kaikille perusfunktioille, $\int_E f\, dm = 0$.

3. Olkoon f mikä tahansa mitallinen funktio. Voimme kirjoittaa $f = f^+ - f^-$, ja koska $f^+ \ge 0$ ja $f^- \ge 0$, tiedämme että

$$\int_E f^+\, dm = 0 \qquad \text{ja} \qquad \int_E f^-\, dm = 0.$$

Koska
$$\int_E f\,dm = \int_E f^+\,dm - \int_E f^-\,dm,$$
niin $\int_E f\,dm = 0$.

(5) Olkoon funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ määritelty niin, että
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$
Laske
$$\int_{[0,1]} f\,dm.$$

* * *

Koska f saa vain arvoja 0 ja 1, sen integraali on määritelmän nojalla
$$\int_{[0,1]} f\,dm = 1 \cdot m((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]) + 0 \cdot m(\mathbb{Q} \cap [0,1]).$$
Tiedämme että $\mathbb{Q}$ on numeroituva, joten sen osajoukko $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ on myös numeroituva. Korollaarin 2.4 nojalla $m(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$. Koska
$$[0,1] = ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]) \cup (\mathbb{Q} \cap [0,1]),$$
niin Harjoitusten 4 tehtävän 2 nojalla
$$m((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]) = m([0,1]) = 1.$$
Tällöin
$$\int_{[0,1]} f\,dm = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1.$$
(Huomaa että rationaali- ja irrationaalilukujen ominaisuuksista tarvittiin vain sitä tietoa että rationaaliluvut ovat numeroituva joukko; kaikki muu oli puhdasta mittateoreettista oveluutta.)

(6) Todista Lemma 3.1.

Vihje. Tarkastele tapaukset $b = 0$ ja $b \neq 0$ erikseen. Huomaa että funktio $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$,
$$g(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda, \qquad 0 < \lambda < 1,$$
saa pienimmän arvonsa pisteessä $t = 1$.

* * *

Jos $b = 0$, niin väite kutistuu muotoon

$$0 \leq \lambda a,$$

missä $a \geq 0$, $0 < \lambda < 1$. Tämä on selvästikin (?) totta.

Jos $b \neq 0$, väitteen epäyhtälö voidaan jakaa puolittain luvulla b, jolloin saadaan

$$a^{\lambda} b^{-\lambda} \leq \lambda a/b + (1 - \lambda).$$

Kirjoittamalla "tuplamuuttujan" a/b paikalle muuttuja t, tämä on

$$t^{\lambda} \leq \lambda t + (1 - \lambda),$$

eli

$$0 \leq \lambda t + (1 - \lambda) - t^{\lambda}.$$

Funktiolle $g(t) = \lambda t + (1 - \lambda) - t^{\lambda}$ meillä on $g(1) = \lambda + (1 - \lambda) - 1 = 0$. Koska vihjeen nojalla tiedämme että tämä on funktion g minimi, epäyhtälö

$$0 \leq \lambda t + (1 - \lambda) - t^{\lambda}$$

pätee jokaiselle $t \in [0, \infty[$, $0 < \lambda < 1$, joten alkuperäinen epäyhtälö pätee kaikille a, b.