Analysis IV
Spring 2011
Exercises 7 / Suomeksi

(1) Olkoon f mitallinen funktio ja $[a, b]$ reaaliväli. Osoita että joukko
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [a, b]\}$$
on mitallinen.

(2) Todista Lause 2.26 (b').

(3) Olkoon f ei-negatiivinen mitallinen funktio. Näytä että jos $\int f\, dm = 0$ niin $f = 0$ m.k. (melkein kaikkialla).

(4) Olkoon f mitallinen funktio. Näytä että jos E on mitallinen joukko siten että $m(E) = 0$, niin $\int_E f\, dm = 0$.

Vihje. Todista tämä ensin yksinkertaisille (*simple*) funktioille. Sitten sen avulla funktioille f joille $f \geq 0$; katso Lause 2.26(d). Sitten huomaa että $f = f^+ - f^-$.

(5) Olkoon funktio $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ määritelty niin, että
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$
Laske
$$\int_{[0,1]} f\, dm.$$

(6) Todista Lemma 3.1.

Vihje. Tarkastele tapaukset $b = 0$ ja $b \neq 0$ erikseen. Huomaa että funktio $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$,
$$g(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda, \qquad 0 < \lambda < 1,$$
saa pienimmän arvonsa pisteessä $t = 1$.