Analysis IV
Spring 2011
Exercises 8 ($\Leftrightarrow$ First exam) / Answers / Suomeksi

(1) Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Määritellään funktio $d : X \times X \to \mathbb{R}$ yhtälöllä

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \neq y \\ 0, & \text{kun } x = y. \end{cases}$$

Osoita, että d on metriikka joukossa X.

* * *

Funktio d on metriikka jos se toteuttaa seuraavat neljä ehtoa:

(a) $d(x, y) \geq 0$
Koska $d(x, y) \in \{0, 1\}$ kaikilla x, y, $d(x, y) \geq 0$.

(b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
Selvä d:n määritelmän nojalla.

(c) $d(x, y) = d(y, x)$
Koska yhtäsuuruus $=$ on vaihdannainen, d on vaihdannainen.

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
Epäyhtälön vasen puoli saa vain arvot 0 ja 1. Oikea puoli saa vain arvot 0, 1 ja 2. Ainoa tapaus jossa epäyhtälö ei pätisi olisi vasen puoli $= 1$ ja oikea puoli $= 0$. Jos vasen puoli saa arvon 1, niin $x \neq z$. Tällöin joko $x \neq y$ tai $y \neq z$ (koska muutoin $x = y = z$), joten oikea puoli on ei ole 0; eli ristiriitaa ei voi syntyä ja epäyhtälö pätee kaikilla x, y ja z.

tai

Käydään läpi kaikki mahdolliset x-y-z-yhdistelmät ja katsotaan päteekö epäyhtälö. Koska d:n arvo riippuu vain siitä ovatko sen argumentit erisuuria vai yhtäsuuria, riittää käydä läpi erilaiset eri- ja yhtäsuuruuksien yhdistelmät.

- Jos $x = y = z$, molemmat puolet ovat 0; OK.
- Jos $x \neq y = z$ tai $x = y \neq z$, epäyhtälö on $0 \leq 1$ ($x = z$) tai $1 \leq 1$ ($x \neq z$), joka on OK.
- Jos $x \neq y \neq z$, joko $0 \leq 2$ ($x = z$) tai $1 \leq 2$ ($x \neq z$); molemmat OK.

(2) Olkoon M ei-tyhjä joukko avaruudessa $\mathbb{R}^n$, ja olkoon

$$M_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < r\}$$

kaikille $r > 0$. Osoita, että M_r on avoin joukko $\mathbb{R}^n$:ssä kaikille $r > 0$. (Huomaa, että $d(x, M) = \inf\{d(x, y) \mid y \in M\}$.)

* * *

Olkoon $x \in M_r$. (Huomaa että emme oleta $x \in M$; ja emme osoita tai oleta että M olisi avoin,) Näytetään että on olemassa avoin ympäristö, tässä tapauksessa avoin pallo B, niin että $x \in B \subset M_r$. Tämä osoittaa että M_r on avoin.

Koska $x \in M_r$, tiedämme että $d(x, M) < r$. Koska tämä on aito epäyhtälö, jollekin luvulle $\epsilon > 0$ pätee, että $d(x, M) = r - \epsilon$.

Pallolle $B(x, \epsilon)$ pätee $B(x, \epsilon) \subset M_r$. Tämän näkemiseksi olkoon $x_1 \in B(x, \epsilon)$, se on, olkoon x_1 piste siten, että $d(x, x_1) < \epsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(x_1, M) &= \inf\{d(x_1, y) \mid y \in M\} \\ &\leq \inf\{d(x_1, x) + d(x, y) \mid y \in M\} \\ &= d(x, x_1) + d(x, M) \\ &< \epsilon + r - \epsilon \\ &= r. \end{aligned}$$

(3) Olkoon $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (M, d). Todista (*prove*) että on olemassa luku $R > 0$ siten, että $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_d(x_1, R)$.

* * *

Katso Harj. 2 t. 4.

(4) Osoita, että jos E_1 ja E_2 ovat mitallisia joukkoja, niin

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

* * *

Voimme kirjoittaa

$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_1 \cap E_2).$$

Koska nämä kolme joukkoa ovat pistevieraita, saamme että

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1 \setminus E_2) + m(E_2 \setminus E_1) + m(E_1 \cap E_2).$$

Voimme lisätä termin $m(E_1 \cap E_2)$ puolittain, jolloin saamme

$$
\begin{aligned}
&m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) \\
&= \underbrace{m(E_1 \setminus E_2) + m(E_1 \cap E_2)}_{=m(E_1) \quad \text{(pistevieraat)}} + \underbrace{m(E_2 \setminus E_1) + m(E_1 \cap E_2)}_{=m(E_2) \quad \text{(pistevieraat)}}.
\end{aligned}
$$

(5) Olkoon A ei-mitallinen joukko, ja olkoon

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in A \text{ ja} \\ -1 & \text{jos } x \notin A. \end{cases}
$$

Onko f mitallinen funktio? Entä $|f|$?

* * *

Katso Harj. 5 t. 3.