
Analysis IV

Spring 2011

Exercises 8 (\Leftrightarrow First exam) / Suomeksi

- (1) Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Määritellään funktio $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yhtälöllä

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \neq y \\ 0, & \text{kun } x = y. \end{cases}$$

Osoita, että d on metriikka joukossa X .

- (2) Olkoon M ei-tyhjä joukko avaruudessa \mathbb{R}^n , ja olkoon

$$M_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < r\}$$

kaikille $r > 0$. Osoita, että M_r on avoin joukko \mathbb{R}^n :ssä kaikille $r > 0$. (Huomaa, että $d(x, M) = \inf\{d(x, y) \mid y \in M\}$.)

- (3) Olkoon $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (M, d) . Todista (*prove*) että on olemassa luku $R > 0$ siten, että $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_d(x_1, R)$.

- (4) Osoita, että jos E_1 ja E_2 ovat mitallisia joukkoja, niin

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

- (5) Olkoon A ei-mitallinen joukko, ja olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in A \text{ ja} \\ -1 & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Onko f mitallinen funktio? Entä $|f|$?