Analysis IV
Spring 2011
Exercises 9 / Answers / Suomeksi

(1) Todista Lemma 3.9: Jos $\{f_n\}$ on Cauchyn jono metriikassa d_{L^p}, $1 \le p < \infty$, niin $\{f_n\}$ on Cauchyn jono mitassa m.

* * *

Koska $\{f_n\}$ on Cauchyn jono metriikassa d_{L^p}, meillä on mille tahansa $\epsilon > 0$ olemassa luku N siten, että

$$d(f_m, f_n) = \left(\int |f_n - f_m|^p \, dm \right)^{1/p} < \epsilon$$

kaikilla $m, n > N$.

Sanomme että $\{f_n\}$ on Cauchyn jono mitassa m, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ ja jokaiselle $\delta > 0$ on olemassa N siten, että

$$m(\{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| \ge \epsilon\}) < \delta$$

kaikilla $m, n > N$.

Oletetaan että $\{f_n\}$ ei ole Cauchyn jono mitassa m. Tällöin on olemassa lukupari ϵ_0 ja δ_0 siten, että mille tahansa N on olemassa lukupari $m, n > N$ siten, että

$$m(\{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| \ge \epsilon_0\}) \ge \delta_0.$$

Jos kirjoitamme

$$E = \{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| \ge \epsilon_0\},$$

niin tämä tarkoittaa että $m(E) \ge \delta_0$. Tästä saadaan seuraava ristiriita:

$$\left(\int |f_n - f_m|^p \, dm \right)^{1/p} \ge \left(\int_E |f_n - f_m|^p \, dm \right)^{1/p}$$
$$\ge \left(\int_E \epsilon_0^p \, dm \right)^{1/p} \ge \epsilon_0 \underbrace{\left(\int_E 1 \, dm \right)}_{= m(E)}^{1/p} \ge \epsilon_0 \delta_0^{1/p}.$$

(2) Todista Hölderin epäyhtälö sarjoille: Let $1 < p < \infty$ and $1 < q < \infty$ be such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Suppose that $\{a_n\} \in \ell^p$ and $\{b_n\} \in \ell^q$. Then $\{a_n b_n\} \in \ell^1$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{1/q}.$$

* * *

Jos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$ tai $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$, epäyhtälöt molemmat puolet menevät nollaksi ja väite pätee. Voidaan siis olettaa että $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q > 0$.

Kirjoitetaan $A = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p}$ ja $B = (\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q)^{1/q}$. Huomaa että A ja B ovat vakioita (lukuja) jotka eivät riipu muuttujan n arvosta. Käyttämällä Lemmaa 3.1 eli Youngin epäyhtälöä saadaan että

$$\frac{a_n}{A} \frac{b_n}{B} \leq \frac{a_n^p}{A^p p} + \frac{b_n^q}{B^q q}.$$

Summaamalla tämä yli indeksin n saadaan

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{A} \frac{|b_n|}{B} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n|^p}{A^p p} + \frac{|b_n|^q}{B^q q} \right) \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p}{A^p p} + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q}{B^q q} \\ &= \frac{A^p}{A^p p} + \frac{B^q}{B^q q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Kun tämä kerrotaan puolittain luvulla $AB = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p} (\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q)^{1/q}$, saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{1/q}.$$

(3) Todista Minkowskin epäyhtälö sarjoille: Olkoon $1 \leq p < \infty$, $\{a_n\} \in \ell^p$ ja $\{b_n\} \in \ell^p$. Tällöin $\{a_n + b_n\} \in \ell^p$ ja

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{1/p}.$$

$* * *$

Koska $|a_n + b_n| \leq 2^{p-1}|a_b| + 2^{p-1}|b_n|$ (katso luennot), niin väitetyn epäyhtälön vasen puoli on hyvin määritelty. Jos $\{a_n\} = \{0\}$, $\{b_n\} = \{0\}$ tai $\{a_n + b_n\} = \{0\}$, niin väite pätee; voidaan siis olettaa että yksikään jonoista ei ole nollajono. Järjestellään summia:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n||a_n + b_n|^{p-1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)\, |a_n + b_n|^{p-1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \big(|a_n||a_n + b_n|^{p-1} + |b_n||a_n + b_n|^{p-1}\big) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||a_n + b_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||a_n + b_n|^{p-1}.
\end{aligned}$$

Tässä kohtaa käytetään Hölderin epäyhtälöä. Huomaa että se eksponentti q jolle ehto $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ pätee on $q = p/(p-1)$, ja $1/q = (p-1)/p$.

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^{(p-1)p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \\
&\quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^{(p-1)p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \\
&= \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{1-1/p}.
\end{aligned}$$

Jakamalla tämä puolittain luvulla $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{1-1/p}$ saadaan

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{1/p}.$$

(4) Todista Lemma 3.15 tapauksessa $p = \infty$: Jos $\{x_{n,k}\} \subset \ell^\infty$ on Cauchyn jono, on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_{n,k}| \leq C$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

$* * *$

Koska $\{x_{n,k}\}$ on Cauchyn jono, tiedetään että jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa N siten, että

$$\sup_k |x_{m,k} - x_{n,k}| < \epsilon$$

kun $m, n > N$. Valitaan $\epsilon = 1$. Tällöin jollekin N pätee, että kaikilla $n > N$

$$\sup_k |x_{N+1,k} - x_{n,k}| < 1,$$

eli

$$\sup_k |x_{n,k}| < 1 + \sup_k |x_{N+1,k}|.$$

Koska jokaiselle yksittäiselle jonolle $\{x_{n,k}\}_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$, tiedetään että

$$\sup_k |x_{n,k}| < \infty$$

jokaiselle $n = 1, 2, \ldots, N$, eli erityisesti

$$\max_{n=1,\ldots,N} \sup_k |x_{n,k}| < \infty.$$

Yhdistämällä nämä kaksi arviota saadaan, että

$$\sup_k |x_{n,k}| < \underbrace{1 + \sup_k |x_{N+1,k}| + \max_{n=1,\ldots,N} \{\sup_k |x_{n,k}|\}}_{= C}$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$.

(Vertaa harjoitusten 2 tehtävään 4.)

(5) Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Määritellään funktiot f ja g olemaan $f : [0, 2\pi] \to \hat{\mathbb{R}}$ ja $g : [0, 2\pi] \to \hat{\mathbb{R}}$,

$$f(\theta) = \theta^{-1/q} \qquad \text{ja} \qquad g(\theta) = \theta^{-1/2q}.$$

Näytä että $f \in L^p[0, 2\pi]$, $f \notin L^q[0, 2\pi]$, $g \in L^q[0, 2\pi]$, ja $g \notin L^\infty[0, 2\pi]$. (Voit olettaa että f ja g ovat mitallisia.)

* * *

Muistetaan että f kuuluu L^p-avaruuteen (sanotaan yksinkertaisesti "äl-pee-avaruuteen") eksponentilla p, $1 < p < \infty$, jos $\int_U |f|^p \, dm < \infty$. Tarkastellaan ensin väitettä $f \in L^p[0, 2\pi]$. Koska $p < q$, niin $-p/q > -1$ ja $1 - p/q > 0$. Näin ollen

$$\int |f|^p \, dm = \int_{[0,2\pi]} \theta^{-p/q} \, dm \overset{(1)}{=} \int_0^{2\pi} (-p/q)\theta^{1-p/q} \, d\theta < \infty.$$

Yhtäsuuruus (1) seuraa siitä että jos Riemannin integraali ("vanha") on olemassa, Lebesguen integraali ("uusi") saa saman arvon.

Samaten tapauksessa $f \notin L^q[0, 2\pi]$ nähdään että

$$\int |f|^q \, dm = \int_{[0,2\pi]} \theta^{-q/q} \, dm = \int_0^{2\pi} \theta^{-1} \, d\theta = \Big|_0^{2\pi} \ln \theta = \infty.$$

Väitteelle $g \in L^q[0, 2\pi]$ saadaan että

$$\int |g|^q \, dm = \int_{[0,2\pi]} \theta^{-q/2q} \, dm = \int_0^{2\pi} \theta^{-1/2} \, d\theta = \Big|_0^{2\pi} \theta^{1/2}/2 = \sqrt{2\pi}/2 < \infty.$$

Viimeisenä, sen näkemiseksi että $g \notin L^\infty[0, 2\pi]$ pitää näyttää että ehto

$$\operatorname{ess\,sup}_{[0,2\pi]} |g| < \infty$$

ei päde. Mutta koska $\sup_{[0,2\pi]} |g| = \infty$ (kun $\theta \to 0$), ja g on jatkuva funktio, niin supremum ei muutu nollamittaisen joukon poisjättämisellä (se "ei riipu yksittäisistä pisteistä"), joten

$$\operatorname{ess\,sup}_{[0,2\pi]} |g| = \infty.$$

(6) Olkoon $f \in L^1$ ja $g \in L^\infty$. Näytä että

$$\int |fg|\, dm \leq d_{L^1}(f,0) d_{L^\infty}(g,0).$$

* * *

Koska $g \in L^\infty$, tiedetään että

$$d_{L^\infty}(g,0) = \operatorname{ess\,sup} |g(x)| < \infty.$$

Integraalin arvo ei riipu integroitavan funktion arvosta nollamittaisessa joukossa, joten

$$\int |fg|\, dm \leq \int |f| \underbrace{\operatorname{ess\,sup} |g|}_{\text{vakio}}\, dm = d_{L^\infty}(g,0) \int |f|\, dm = d_{L^1}(f,0) d_{L^\infty}(g,0).$$

(Tarkemmin: Ehto $\operatorname{ess\,sup} |g(x)| < \infty$ tarkoittaa että $\sup_{X \setminus A} |g| < \infty$ missä A on joukko jolle $m(A) = 0$. Tämän jälkeen huomattaisiin että

$$\int |fg|\, dm = \int_{X \setminus A} |fg|\, dm + \underbrace{\int_A |fg|\, dm}_{=0},$$

ja kohdeltaisiin integraalia $\int_{X \setminus A} |fg|\, dm$ kuin integraalia $\int |fg|\, dm$ yllä.)