

---

**Analysis IV**

Spring 2011

Exercises 9 / Suomeksi

---

- (1) Todista Lemma 3.9.
- (2) Todista Hölderin epäyhtälö sarjoille (luentojen rivi (3.4)).
- (3) Todista Minkowskin epäyhtälö sarjoille (luentojen rivi (3.5)).
- (4) Todista Lemma 3.15 tapauksessa  $p = \infty$ .
- (5) Olkoon  $1 \leq p < q < \infty$ . Määritellään funktiot  $f$  ja  $g$  olemaan  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$  ja  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$ ,  
$$f(\theta) = \theta^{-1/q} \quad \text{ja} \quad g(\theta) = \theta^{-1/2q}.$$
Näytä että  $f \in L^p[0, 2\pi]$ ,  $f \notin L^q[0, 2\pi]$ ,  $g \in L^q[0, 2\pi]$ , ja  $g \notin L^\infty[0, 2\pi]$ . (Voit olettaa että  $f$  ja  $g$  ovat mitallisia.)

- (6) Olkoon  $f \in L^1$  ja  $g \in L^\infty$ . Näytä että

$$\int |fg| dm \leq d_{L^1}(f, 0) d_{L^\infty}(g, 0).$$

We write  $\hat{\mathbb{R}}$  as a short for  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ , the extended real interval. We write  $L^p[0, 2\pi]$  for  $L^p([0, 2\pi])$ .