Analysis IV
Spring 2011
Exercises 10 / Answers / Suomeksi

(1) Olkoon funktiot $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n^2, & \text{kun } x \in [-n, n] \text{ ja} \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Suppeneeko jono f_n kohti funktiota $f(x) = 0$

(a) pisteittäin,
(b) mitan m mielessä,
(c) metriikan d_{L^p} mielessä kun $1 < p < \infty$,
(d) metriikan d_{L^∞} mielessä?

* * *

Vastaukset ovat kyllä, kyllä, kyllä ja neljänteenkin kyllä.

(a) pisteittäinen suppeneminen; eli, onko $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ kaikilla x? Jos n on riittävän iso, mille tahansa kiinnitetylle x pätee $[-n, n]$. Voidaan olettaa että $f_n(x) = 1/n^2$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

joten $f_n \to f$ pisteittäin.

(b) suppeneminen mitan m mielessä, eli, onko jokaiselle $\epsilon, \delta > 0$ olemassa N siten että $m(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \delta$ kun $n \geq N$? Kyllä on, sillä mille tahansa $\epsilon > 0$ voidaan valita $N = 1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Tällöin $1/n^2 < \epsilon$ jokaiselle $n \geq N$, ja koska $|f_n(x) - f(x)| \leq 1/n^2$, niin

$$m(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0 < \delta$$

mille tahansa $\delta > 0$.

(c) suppeneminen metriikan d_{L^p}, $1 < p < \infty$, mielessä, eli, onko olemassa N siten että

$$\left(\int |f_n - f|^p \, dm\right)^{1/p} < \epsilon$$

kaikilla $n > N$? Lasketaan integraali:

$$\begin{aligned} &\left(\int |f_n - f|^p \, dm\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{[-n,n]} 1/n^{2p} \, dm\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{2n}{n^{2p}}\right)^{1/p} = 2^{1/p} n^{\frac{1}{p}-2}. \end{aligned}$$

Koska $1 < p < \infty$, niin $\frac{1}{p} - 2 < 0$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{p}-2} = 0,$$

ja f_n suppenee d_{L^p}-metriikan mielessä.

(d) suppeneminen d_{L^∞}-metriikan mielessä, eli onko olemassa N siten että

$$\operatorname{ess\,sup} |f_n - f| < \epsilon$$

jokaisella $n > N$? Tämä on

$$\operatorname{ess\,sup} |f_n - f| = 1/n^2 < \epsilon,$$

ja tämä on totta kun $n > 1/\sqrt{\epsilon}$.

(2) Olkoon f määritelty $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Laske funktion f

(a) $C_{\mathbb{R}}([0,1])$-normi ja
(b) $L^1([0,1])$-normi.

* * *

(a) f:n $C_{\mathbb{R}}([0,1])$-normi on

$$\|f\| = \sup\{f(x) \mid x \in [0,1]\} = \sup\{x^n \mid x \in [0,1]\} = 1.$$

(b) f:n $L^1([0,1])$-normi on

$$\|f\| = \int_{[0,1]} x^n \, dm = \Big/_{0}^{1} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

(3) Näytä että ℓ^p*-avaruuksien standardinormit* ovat normeja; eli näytä että

$$\|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p \right)^{1/p}$$

on normi jonoille $\{x_n\} \in \ell^p$, $1 < p < \infty$, ja näytä että

$$\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

on normi jonoille $\{x_n\} \in \ell^\infty$.

* * *

Funktio $f : X \to \mathbb{R}$ on *normi* jos (i) $f(x) \geq 0$, (ii) $f(x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0$, (iii) $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$, ja (iv) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

(i) on triviaali.

(ii) on helppo: jos $(\sum_n |x_n|^p)^{1/p} = 0$ niin $\sum_n |x_n|^p = 0$ niin $|x_n| = 0$ jokaiselle n joten $\{x_n\} = \{0\}$; ja toinen suunta on triviaali. (Ei kannata näyttää ed. lausetta yhdellekään äidinkielenopelle.) Samaten $|x_n| \geq 0$ riippumatta siitä millainen jono

$\{x_n\}$ on, joten jos $\sup_n |x_n| = 0$, niin $0 \leq |x_0| \leq 0$ eli $x_n = 0$ jokaisella n.

(iii) on triviaali: $(\sum_n |\alpha x_n|^p)^{1/p} = (|\alpha|^p \sum_n |x_n|^p)^{1/p} = |\alpha| \, (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$.

(iv), kolmioepäyhtälö, on näistä vaikein; se on tosin toiselta nimeltään Minkowskin (sarja)epäyhtälö, ja se on todistettu Harjoitusten 9 tehtävässä 3.

Kolmioepäyhtälö tapauksessa ℓ^∞ on helppo:

$$\begin{aligned} \|\{x_n + y_n\}\|_\infty &= \sup_n |x_n + y_n| \\ &\leq \sup_n (|x_n| + |y_n|) \\ &\leq \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n| \\ &= \|\{x_n\}\|_\infty + \|\{y_n\}\|_\infty. \end{aligned}$$

(4) Näytä että avaruuden $C_{\mathbb{R}}([0,1])$ normit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 (1-t)|f(t)| \, dt$$

ja

$$\|f\|_2 = \int_0^1 (1-t^3)|f(t)| \, dt$$

on ekvivalentteja. (Katso Määritelmä 4.4. Tässä ja seuraavassa tehtävässä riittää käsitellä ekvivalenttiutta; näitä funktioita ei tarvitse todistaa normeiksi.)

* * *

Normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja jos on olemassa vakio C siten että

$$\frac{1}{C}\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq C\|f\|_1$$

jokaiselle f; tässä tapauksessa jokaiselle $f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$. Näille normeille ekvivalenttiusväite on

$$\begin{aligned} \frac{1}{C}\int_0^1 (1-t)|f(t)| \, dt \leq \int_0^1 (1-t^3)|f(t)| \, dt \\ \leq C\int_0^1 (1-t)|f(t)| \, dt, \end{aligned}$$

ja tämä pätee mikäli on olemassa vakio C siten että

$$\frac{1}{C}(1-t) \leq (1-t^3) \leq C(1-t)$$

kaikilla $t \in [0,1]$. (Oikeastaan $t \in (0,1)$ riittää; kaksi pistettä muodostavat nollamittaisen joukon, ja nollamittainen joukko ei vaikuta integraalin arvoon.) Ensimmäinen epäyhtälö on $\frac{1}{C}(1-t) \leq 1-t^3$, joka sievenee (kun $t \in (0,1)$) muotoon

$$1/C \leq \frac{1-t^3}{1-t} = \frac{(1-t)(1+t+t^2)}{1-t} = 1+t+t^2.$$

Tämä pätee kaikilla $t \in (0,1)$ kun $C \geq 1$. Toinen epäyhtälö on $(1-t^3) \leq C(1-t)$ eli

$$C \geq \frac{1-t^3}{1-t} = 1+t+t^2,$$

joka pätee kaikilla $t \in (0,1)$ jos $C \geq 3$. Valitaan $C = 3$, jolloin

$$\frac{1}{3}\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq 3\|f\|_1$$

kaikilla $f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$.

(5) Olkoon $P([0,1])$ välillä $[0,1]$ määriteltyjen polynomien joukko. Näytä että normit

$$\|p\|_a = \sup\{|p(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

ja

$$\|p\|_b = \int_0^1 |p(x)|\,dx,$$

$p \in P([0,1])$, eivät ole ekvivalentteja.

* * *

Sen näyttämiseksi että normit eivät ole ekvivalentteja, pitää näyttää että millään vakiolla C ehto

$$\frac{1}{C}\|p\|_a \leq \|p\|_b \leq C\|p\|_a$$

ei päde kaikilla $p \in P([0,1])$. Tähän on kaksi yleistä keinoa. Yksi on löytää $p \in P([0,1])$ jolle toinen termi on äärellinen ja toinen ääretön. Toinen keino on löytää jono funktioita $p_n \in P([0,1])$ siten että jonon funktioiden toiset termit ovat vakioita tai rajoitettuja, ja toiset termit kasvavat rajata. Käytetään tätä toista keinoa. Valitaan $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ olemaan

$$p_n(x) = (1-x)^n.$$

Nämä ovat polynomeja joiden maksimi on pisteessä $x = 0$, ollen $p_n(0) = 1$, ja joille $\int_0^1 p_n(x)\,dx = 1/(n+1)$. Siispä

$$\|p_n\|_b = 1/(n+1),$$

mutta

$$\|p_n\|_a = 1,$$

joten jos käypä vakio C olisi olemassa, ehdon

$$\frac{1}{C} \leq 1/(n+1) \leq C$$

tulisi päteä jokaisella $n = 1, 2, \ldots$, mikä on ristiriita: mille tahansa kiinnitetylle C voidaan aina löytää iso n siten että ensimmäinen epäyhtälö ei päde.