Analysis IV
Spring 2011
Exercises 10 / Suomeksi

(1) Olkoon funktiot $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n^2, & \text{kun } x \in [-n, n] \text{ ja} \\ 0, & \text{muualla.} \end{cases}$$

Suppeneeko jono f_n kohti funktiota $f(x) = 0$

(a) pisteittäin,
(b) mitan m mielessä,
(c) metriikan d_{L^p} mielessä kun $1 < p < \infty$,
(d) metriikan d_{L^∞} mielessä?

(2) Olkoon f määritelty $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Laske funktion f

(a) $C_\mathbb{R}([0,1])$-normi ja
(b) $L^1([0,1])$-normi.

(3) Näytä että ℓ^p-*avaruuksien standardinormit* ovat normeja; eli näytä että

$$\|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p}$$

on normi jonoille $\{x_n\} \in \ell^p$, $1 < p < \infty$, ja näytä että

$$\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

on normi jonoille $\{x_n\} \in \ell^\infty$.

(4) Näytä että avaruuden $C_\mathbb{R}([0,1])$ normit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 (1-t)|f(t)|\,dt$$

ja

$$\|f\|_2 = \int_0^1 (1-t^3)|f(t)|\,dt$$

on ekvivalentteja. (Katso Määritelmä 4.4. Tässä ja seuraavassa tehtävässä riittää käsitellä ekvivalenttiutta; näitä funktioita ei tarvitse todistaa normeiksi.)

(5) Olkoon $P([0,1])$ välillä $[0,1]$ määriteltyjen polynomien joukko. Näytä että normit

$$\|p\|_a = \sup\{|p(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

ja

$$\|p\|_b = \int_0^1 |p(x)|\,dx,$$

$p \in P([0,1])$, eivät ole ekvivalentteja.