Analysis IV
Spring 2011
Exercises 11 / Answers / Suomeksi

(1) Todista Lause 4.7 (b) ja (c):

> **Lause 4.7** Olkoon X vektoriavaruus ja olkoon $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ekvivalentteja avaruuden X normeja. Olkoon d_1 ja d_2 näiden normien avulla määritellyt metriikat, eli olkoon $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$ ja $d_2(x,y) = \|x-y\|_2$. Olkoon $\{x_n\} \in X$ jono.
> (a) Jono $\{x_n\}$ suppenee kohti pistettä x metrisessä avaruudessa (X, d_1) jos ja vain jos $\{x_n\}$ suppenee kohti pistettä x metrisessä avaruudessa (X, d_2).
> (b) $\{x_n\}$ on Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (X, d_1) jos ja vain jos $\{x_n\}$ on Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (X, d_2).
> (c) (X, d_1) on täydellinen jos ja vain jos (X, d_2) on täydellinen.

* * *

(b) Olkoon $\{x_n\}$ Cauchyn jono metriikassa (X, d_1), se on, olkoon jokaiselle $\epsilon_1 > 0$ olemassa luku N siten että $d_1(x_m, x_n) < \epsilon_1$ kun $m, n > N$.

Näytetään että Cauchy-ehto pätee jonolle $\{x_n\}$ myös metriikalle d_2. Olkoon tämän ehdon ϵ nyt $\epsilon_2 > 0$ erotuksena d_1-ehdon luvusta ϵ_1. Koska normit ovat ekvivalentteja, on olemassa vakio C siten että

$$\begin{aligned} d_2(x_m, x_n) &= \|x_m - x_n\|_2 \\ &\leq C\|x_m - x_n\|_1 = Cd_1(x_m, x_n), \end{aligned}$$

ja koska $\{x_n\}$ on Cauchyn jono metriikassa d_1, jollekin N pätee (valitsemalla $\epsilon_1 = \epsilon_2/C$) että

$$Cd_1(x_m, x_n) \leq C\frac{\epsilon_2}{C} = \epsilon_2$$

kun $m, n > N$.

(c) Olkoon (X, d_1) täydellinen, se on, oletetaan että jokainen Cauchyn jono metriikan d_1 mielessä suppenee metriikan d_1 mielessä. Olkoon $\{x_n\}$ Cauchyn jono avaruudessa (X, d_2). Kohdan (b) nojalla $\{x_n\}$ on Cauchyn jono avaruudessa (X, d_1). Koska (X, d_1) on täydellinen, $\{x_n\}$ suppenee metriikassa (X, d_1). Kohdan (a) nojalla $\{x_n\}$ suppenee metriikassa (X, d_2).

(2) Olkoon

$$c = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} x_n \text{ on olemassa}\}$$

ja

$$c_0 = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Todista todeksi tai näytä vääräksi.

(i) $c_0 \subset \ell^1$
(ii) Jos $\{x_n\} \in \ell^p$ ja $\{y_n\} \in \ell^{p/(p-1)}$, $1 < p < \infty$, niin $\{x_n y_n\} \in \ell^1$.
(iii) Jos $x \in c$, niin on olemassa $y \in c$ siten että $x + y \in c_0$.

* * *

(i) $c_0 \subset \ell^1$: Ei tottae. Jono $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ kuuluu avaruuteen c_0, mutta

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty,$$

joten $\{1/n\} \notin \ell^1$.
(ii) Jos $\{x_n\} \in \ell^p$ ja $\{y_n\} \in \ell^{p/(p-1)}$, $1 < p < \infty$, niin $\{x_n y_n\} \in \ell^1$: Totta. Jonolle $\{x_n y_n\}$ voidaan käyttää Hölderin epäyhtälöä, joka sanoo että

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} < \infty.$$

(iii) Jos $x \in c$, on olemassa jono $y \in c$ siten että $x + y \in c_0$: Totta. Olkoon $\{x_n\} \in c$. Tällöin $\{-x_n\} \in c$, ja $\{x_n\} + \{-x_n\} = \{0\} \in c_0$.

(3) Olkoon c ja c_0 kuten yllä, ja olkoon

$$c_{0,0} = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ siten että } x_n = 0 \ \forall n > N\}.$$

Todista että $c_{0,0} \subset \ell^p \subset \ell^\infty$ $(1 \leq p < \infty)$ ja $c_{0,0} \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$.

* * *

(a) $c_{0,0} \subset \ell^p$ $(1 \leq p < \infty)$
Olkoon $\{x_n\} \in c_{0,0}$. Tällöin jollekin luvulle N pätee

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Tämä on äärellinen luku koska jokainen $|x_n|$ on äärellinen ja niitä on äärellisen monta.
(b) $\ell^p \subset \ell^\infty$ $(1 \leq p < \infty)$
Jos $\{x_n\} \in \ell^p$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Tällöin $|x_n| < \infty$ jokaiselle n, ja $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$. Näin ollen on olemassa N siten että $|x_n| < 1$ kun $n > N$, ja näin ollen

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, 1\} < \infty.$$

Koska tämä on yksi yläraja luvuille $|x_n|$ ja niiden supremum on *pienin* yläraja, niin

$$\sup_n |x_n| < \infty.$$

(Pelkkä $|x_n| < \infty$ kaikilla n ei riitä. Se pätee jonolle $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, joten ei kuulu avaruuteen ℓ^∞.)

(c) $c_{0,0} \subset c_0$

Selvä, koska jos $\{x_n\} \in c_{0,0}$, niin jollekin N pätee

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n>N}} 0 = 0.$$

(d) $c_0 \subset c$

Myös selvä, koska jos raja-arvo on olemassa ja on nolla (c_0-ehto) niin silloin raja-arvo on olemassa (c-ehto).

(e) $c \subset \ell^\infty$

Olkoon $\{x_n\} \in c$. Tällöin $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ on olemassa ja $x \in \mathbb{R}$, se on, $|x| < \infty$. Koska $x_n \in \mathbb{R}$ jokaiselle n, tiedämme että $|x_n| < \infty$ kaikilla n. Koska $\{x_n\}$ suppenee kohti lukua x, voidaan löytää N siten että $|x_n - x| < 1$ kaikilla $n > N$, joten

$$|x_n| \le \max\{|x_1|, \dots, |x_N|, |x| + 1\} < \infty.$$

(4) Olkoon X avaruus jolla on normi $\|\cdot\|_X$. Olkoon $x \in X \setminus \{0\}$ ja $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Löydä sellainen skalaari $\alpha \in \mathbb{R}$ jolle

$$\|\alpha x\|_X = r.$$

* * *

Koska $x \neq 0$, tiedetään että $\|x\| \neq 0$. Valitaan $\alpha = r/\|x\| \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| = \frac{r\|x\|}{\|x\|} = r.$$

(5) Piirrä seuraavien normien määräämät yksikköympyrät:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|,$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \text{ ja}$$
$$\|x\|_3 = |x_1| + 3|x_2|,$$

missä $x \in \mathbb{R}^2$. (Normin $\|\cdot\|$ määräämä yksikköympyrä koostuu niistä pisteistä x joille $\|x\| = 1$.)

* * *

Yksikköympyrät saadaan ratkaisemalla x kustakin yhtälöstä $\|x\| = 1$. Esimerkiksi kolmannen normin tapauksessa tulee etsiä ne pisteet (x_1, x_2) joille pätee $|x_1| + 3|x_2| = 1$.

- Normille $\|\cdot\|_1$ yksikköympyrä on vinoneliö jonka nurkat ovat pisteissä $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ja $(0,-1)$.
- Normille $\|\cdot\|_2$ yksikköympyrä on "tavallinen" ympyrä jonka säde on 1 ja keskipiste $(0,0)$.
- Normille $\|\cdot\|_3$ yksikköympyrä on venytetty vinoneliö jonka nurkat ovat pisteissä $(1,0)$, $(0,1/3)$, $(-1,0)$ ja $(0,-1/3)$.