Analysis IV
Spring 2011
Exercises 11 / Suomeksi

(1) Todista Lause 4.7 (b) ja (c).

(2) Olkoon
$$c = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} x_n \text{ on olemassa}\}$$
ja
$$c_0 = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$
Todista todeksi tai näytä vääräksi.

(i) $c_0 \subset \ell^1$
(ii) Jos $\{x_n\} \in \ell^p$ ja $\{y_n\} \in \ell^{p/(p-1)}$, $1 < p < \infty$, niin $\{x_n y_n\} \in \ell^1$.
(iii) Jos $x \in c$, niin on olemassa $y \in c$ siten että $x + y \in c_0$.

(3) Olkoon c ja c_0 kuten yllä, ja olkoon
$$c_{0,0} = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ siten että } x_n = 0 \ \forall n > N\}.$$
Todista että $c_{0,0} \subset \ell^p \subset \ell^\infty$ $(1 \le p < \infty)$ ja $c_{0,0} \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$.

(4) Olkoon X avaruus jolla on normi $\|\cdot\|_X$. Olkoon $x \in X \setminus \{0\}$ ja $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Löydä sellainen skalaari $\alpha \in \mathbb{R}$ jolle
$$\|\alpha x\|_X = r.$$

(5) Piirrä seuraavien normien määräämät yksikköympyrät:
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|,$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \text{ ja}$$
$$\|x\|_3 = |x_1| + 3|x_2|,$$
missä $x \in \mathbb{R}^2$. (Normin $\|\cdot\|$ määräämä yksikköympyrä koostuu niistä pisteistä x joille $\|x\| = 1$.)