Analysis IV
Spring 2011
Exercises 12 / Answers / Suomeksi

(1) Todista luentojen sivun 30 toinen esimerkki: Jos $f, g \in L^2$, niin $fg \in L^1$ ja
$$< f, g >= \int fg\, dm$$
on sisätulo.

* * *

Määritelmä. (vähän lyhennelty) Funktio $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$ on *sisätulo*, jos kaikilla $x, y \in X$:

(a) $< x, x > \geq 0$ (huom: $< x, x >$, ei $< x, y >$!),

(b) $< x, x >= 0$ jos ja vain jos $x = 0$,

(c) $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > + \beta < y, z >$ ja

(d) $< x, y >=< y, x >$.

Tässä tapauksessa (väitetty) sisätulo on määritelty funktioille $f, g, h \in L^2$, se on, funktioille joille $\int |f|^2\, dm < \infty$ ja samoin funktioille g ja h. Muista että (kuten Lauseessa 3.4) tämän avaruuden funktioille kirjoitetaan $f = g$ ja pidetään niitä samoina, jos $f = g$ m.k. (melkein kaikkialla), eli nollamittaisen joukon ulkopuolella.[1] Sisätulon määritelmän ehdot ovat muotoa:

(a) $\int ff\, dm = \int |f|^2\, dm \geq 0$ (selvä koska $|f|^2 \geq 0$)

(b) Jos $\int |f|^2\, dm = 0$, niin $|f|^2 = 0$ m.k. joten $f = 0$ m.k.; ja avaruudessa L^2, tämä tarkoittaa että $f = 0$. Jos toisaalta $f = 0$, niin $\int |f|^2\, dm = 0$.

(c) Integraalin perusominaisuuksien (katso luku 2) nojalla
$$\begin{aligned} < \alpha f + \beta g, h > &= \int (\alpha f + \beta g) g\, dm \\ &= \alpha \int fh\, dm + \beta \int gh\, dm \\ &= \alpha < f, h > + \beta < g, h > . \end{aligned}$$

[1] Eli todellakin kirjoitetaan $f = g$ jos $f = 0$ ja
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$
Tämä on järkevää avaruudessa L^2, koska avaruuden normi on integraali, eikä ”näe” nollamittaisia joukkoja koska funktion arvon muuttaminen nollamittaisessa joukossa ei muuta integraalin arvoa.

(d) Selvästikin

$$\int fg\,dm = \int gf\,dm.$$

Tämän lisäksi pitää näyttää että ”jos $f, g \in L^2$, niin $fg \in L^1$”. Tämä on tärkeää koska muuten sisätulon integraalit eivät välttämättä olisi hyvin määriteltyjä. Mutta tämä on helppoa, sillä kyseessä on vain Hölderin epäyhtälö arvoilla $p = q = 2$.

(2) Todista luentojen sivun 30 kolmas esimerkki: Jos $a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in \ell^2$, niin $\{a_n b_n\} \in \ell^1$ ja

$$< a, b >= \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

on sisätulo.

$$* * *$$

Ensinnäkin, ”jos $a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in \ell^2$, niin $\{a_n b_n\} \in \ell^1$”. Tämä pätee, koska kyseessä on pelkästään Hölderin (sarja)epäyhtälö.

Toisena, sisätulon määritelmän neljä ehtoa ovat, kun $a, b, c \in \ell^2$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \geq 0$ koska $a_n^2 \geq 0$ jokaiselle n,

(b) Jos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 0$ niin $a_n^2 = 0$ jokaiselle n koska jokainen a_n^2 on ei-negatiivinen; ja näin ollen $a_n = 0$ jokaiselle n, se on, $\{a_n\} = 0$. Jos $\{a_n\} = 0$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 0$.

(c) Nyt

$$< \alpha a + \beta b, c >= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) c_n$$
$$\leq \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n = \alpha < a, c > + \beta < b, c > .$$

Huomaa että summien erottamiseksi pitää tietää että $\sum_n a_n c_n$ ja $\sum_n b_n c_n$ ovat hyvin määriteltyjä; ja ne ovat, koska $ac, bc \in \ell^1$.

(d) Selvästikin

$$< a, b >= \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n =< b, a > .$$

(3) Todista Lemma 5.6: Olkoon X sisätuloavaruus sisätulolla $< \cdot, \cdot >$. Tällöin kaikille $u, v, x, y \in X$ pätee

(a) $< u+v, x+y > - < u-v, x-y >= 2 < u, y > +2 < v, x >$,
(b) ja kompleksisille X,

$$4 < u, y > =< u + v, x + y > - < u - v, x - y >$$
$$+ i < u + iv, x + iy > -i < u - iv, x - iy > .$$

* * *

(a) Raakaa laskua; alla (c) ja (d) tarkoittavat sisätulon määritelmän kohtia.

$$
\begin{aligned}
&< u+v, x+y > - < u-v, x-y > \\
&\overset{(c)}{=} < u, x+y > + < v, x+y > - < u, x-y > + < v, x-y > \\
&\overset{(d)}{=} < x+y, u > + < x+y, v > - < x-y, u > + < x-y, v > \\
&\overset{(c)}{=} < x, u > + < y, u > + < x, v > + < y, v > \\
&\quad - < x, u > + < y, u > + < x, v > - < y, v > \\
&= < y, u > +2 < x, v > + < y, u > \\
&\overset{(d)}{=} 2 < u, y > +2 < v, x >
\end{aligned}
$$

(b) Otetaan väitteen oikean puolen kolme sisätuloa ja katsotaan niitä erikseen. (Tämä kohta, kuten seuraavakin tehtävä, on enemmän siistin aukilaskun harjoittelua kuin oikeaa matematiikkaa.)

Ensimmäiselle osalle käytetään kohtaa (a) yllä:

$$
\begin{aligned}
&< u+v, x+y > \\
&= 2 < u, y > +2 < v, x > + < u-v, x-y > .
\end{aligned}
$$

Toinen osa pidetään sellaisenaan:

$$- < u-v, x-y > .$$

Kolmannelle käytetään kohtaa (a):

$$
\begin{aligned}
&i < u+iv, x+iy > \\
&= 2i < u, iy > +2i < iv, x > +i < u-iv, x-iy > .
\end{aligned}
$$

Ja neljäs pidetään sellaisenaan:

$$-i < u-iv, x-iy > .$$

Laskemalla nämä neljä yhteen saadaan:

$$
\begin{aligned}
&2 < u, y > +2 < v, x > +2i < u, iy > +2i < iv, x > \\
&= 2 < u, y > +2 < v, x > +2i\overline{< iy, u >} + 2 \underbrace{i^2}_{=-1} < v, x > \\
&= 2 < u, y > +2 \underbrace{i\bar{i}}_{=-i^2=1} < u, y > \\
&= 4 < u, y > .
\end{aligned}
$$

(4) Todista Lemma 5.7: Olkoon X sisätuloavaruus sisätulolla $< \cdot, \cdot >$ ja indusoidulla normilla $\|\cdot\|$. Tällöin kaikille $x, y \in X$ pätee

(a) suunnikassääntö:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

(b) jos X on reaalinen, $4 < x, y >= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$,

(c) jos X on kompleksinen, polarisaatioidentiteetti:

$$\begin{aligned}4 < x, y > &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \\ &\quad + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.\end{aligned}$$

* * *

(a) Muista että $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$. Tällöin

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \\ &=< x+y, x+y > + < x-y, x-y >,\end{aligned}$$

ja Lemman 5.4 (c)-kohdan nojalla,

$$\begin{aligned}&= < x, x > + < x, y > + \overline{< x, y >} + < y, y > \\ &\quad + < x, x > - < x, y > - \overline{< x, y >} + < y, y > \\ &=2 < x, x > +2 < y, y > \\ &=2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

(b) Kuten kohdassa (a), paitsi tietäen että $< x, y >= \overline{< x, y >}$, saadaan

$$\|x+y\|^2 =< x, y > +2 < x, y > + < y, y >$$

ja

$$\|x-y\|^2 < x, x > -2 < x, y > + < y, y > .$$

Vähentämällä toinen ensimmäisestä saadaan

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4 < x, y > .$$

(c) Kompleksisisätulo eroaa reaalisisätulosta sillä että sisätulon määritelmän ehto (d) on $< x, y >= \overline{< y, x >}$ eikä $< x, y >=< y, x >$. Näin ollen

$$\|x+y\|^2 =< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >$$

ja

$$\|x-y\|^2 =< x, x > - < x, y > - < y, x > + < y, y >,$$

joten

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2 < x, y > +2 < y, x > . \tag{1}$$

(Huomaa että tämä ei ole tämän tehtävän kohdan (b) yhtälö, koska ei voida olettaa että $< x, y >=< y, x >$.) Seuraavaksi, Lemman 5.4 (c)-kohdan nojalla

$$\begin{aligned}\|x+iy\|^2 &=< x+iy, x+iy > \\ &=< x, x > -i < x, y > +i < y, x > - < y, y >\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\|x-iy\|^2 &=< x-iy, x-iy > \\ &=< x, x > +i < x, y > -i < y, x > - < y, y > .\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 &= i(-2i < x, y > +2i < y, x >) \\ &= 2 < x, y > -2 < y, x >, \end{aligned}$$

ja lisäämällä tämä puolittain yhtälöön (1) saadaan

$$\begin{aligned} &\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \\ &= 4 < x, y > . \end{aligned}$$

(5) Olkoon $1 \leq p < q < \infty$. Todista että $\ell^p \subset \ell^q$. (Vihje: Tarkastele ensin niitä $x \in \ell^p$ joille $\|x\|_p = 1$.)

$* * *$

Tarkastellaan ensin tapausta $\|x\|_p = 1$, se on, niitä x joille

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = 1.$$

Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1$, joten $|x_n|^p \leq 1$ jokaiselle n. (Jos näin ei olisi, syntyisi välitön ristiriita.)

Koska $|x_n|^p \leq 1$ jokaiselle n jollakin luvulla $1 < p < \infty$, niin $|x_n| \leq 1$ jokaiselle n, ja näin ollen

$$|x_n|^q < |x_n|^p$$

kun $1 < p < q < \infty$, kaikilla n. Koska $x \in \ell^p$, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

joten

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \right)^{1/q} < \infty,$$

se on, $x \in \ell^q$.

Jos taas $x \in \ell^p$ ja $\|x\|_p = 0$, niin $x = 0$, ja $x \in \ell^q$.

Jäljellä on se tapaus että $x \in \ell^p$ ja $\|x\|_p \neq 0, 1$. Nyt voidaan käsitellä jonoa $y = x/\|x\|_p \in \ell^p$, jolle (kuten ed. harjoituksissa nähtiin)

$$\|y\|_p = \left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_p = \frac{1}{\|x\|_p} \|x\|_p = 1.$$

Edeltävän nojalla $y \in \ell^q$. Koska $x \in \ell^p$, tiedetään että $0 < \|x\|_p < \infty$, eli $\|x\|_p$ on äärellinen, nollasta poikkeava luku. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q\right)^{1/q} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p} \right|^q\right)^{1/q} \\
&= \left(\|x\|_p^q \sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n \frac{1}{\|x\|_p} \right|^q\right)^{1/q} \\
&= \|x\|_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q} < \infty,
\end{aligned}
$$

joten $x \in \ell^q$.