Analysis IV
Spring 2011
Exercises 13 / Answers / Suomeksi

(1) Määritellään jonojen $x, y \in \ell^2$ välinen kulma olemaan

$$\theta(x,y) = \cos^{-1}\left(\frac{< x,y >}{\|x\|\|y\|}\right)$$

missä normi ja sisätulo ovat avaruuden ℓ^2 standardit.

Olkoon $x = \{1/2^n\}_{n=1}^{\infty}$ ja $y = \{C/3^n\}_{n=1}^{\infty}$, missä $C \in \mathbb{R}$. Millä luvun C arvolla $\theta(x,y) = \pi/3$? Millä luvun C arvolla $\theta(x,y) = \pi/2$?

* * *

Tapauksessa $\pi/3$ ratkaistava yhtälö olisi

$$\pi/3 = \cos^{-1}\left(\frac{< x,y >}{\|x\|\|y\|}\right)$$

missä C on tuntematon, eli

$$\frac{< x,y >}{\|x\|\|y\|} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Tässä

$$< x,y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{2^n 3^n} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{C}{5}.$$

Koska

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1/3$$

ja

$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^2}{(3^n)^2} = C^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = C^2 1/8,$$

niin $\|x\| = 1/\sqrt{3}$ ja $\|y\| = C/\sqrt{8}$. Näin ollen yhtälö (1) saa muodon

$$\frac{1}{2} = \frac{C/5}{\sqrt{1/3}\,C\sqrt{1/8}} = \frac{\sqrt{24}}{5} \quad (\approx 0.98).$$

Jos tähän löytää sopivan luvun C on tehnyt jotain outoa, sillä yhtälö ei riipu luvusta C ja ei ole tosi. Näin ollen vastaus kysymykseen ”millä luvun C arvolla?” on ”Ei millään luvun C arvolla”.

Tapauksessa $\pi/2$ ratkaistava yhtälö olisi $\frac{<x,y>}{\|x\|\|y\|} = 0$, joka ei myöskään ratkea. (Ainoa luku C jolla $< x,y >= 0$ olisi $C = 0$, jolloin myös $\|y\| = 0$, ja yhtälö räjähtäisi käsiin.)

(2) Mikä on funktioiden x^2 ja x välinen kulma? Käytä avaruuden $L^2([0,1])$ standardia normia ja sisätuloa.

$* * *$

Käyttäen samaa kulman määritelmää kuin yllä, saadaan että

$$\|x\|^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \Big/_0^1 \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}$$

joten $\|x\| = 1/\sqrt{3}$, ja

$$\|x^2\|^2 = \int_0^1 (x^2)^2\,dx = \Big/_0^1 \frac{1}{5}x^5 = \frac{1}{5}$$

joten $\|x^2\| = 1/\sqrt{5}$, ja

$$< x, y >= \int_0^1 xx^2\,dx = \Big/_0^1 \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}.$$

Näin ollen

$$\theta(x, x^2) = \cos^{-1}\frac{1/4}{\sqrt{1/3}\sqrt{1/5}} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0.08\pi.$$

(3) Olkoon $T : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to \mathbb{R}$ funktio

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Näytä että T on jatkuva.

$* * *$

Lemman 6.1 kohdan (d) mukaan T on jatkuva jos on olemassa luku $k > 0$ siten että $\|T(f)\| \leq k$ jokaiselle f jolle $\|f\| \leq 1$. Tässä tapauksessa epäyhtälö $\|f\| \leq 1$ on muotoa

$$\|f\|_{C_{\mathbb{R}}([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} f(x) \leq 1,$$

ja jos tämä ehto pätee, niin

$$\|T(f)\|_{\text{reaalilukujen normi}} = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq |\int_0^1 1\,dx| = 1.$$

Valitaan $k = 1$, ja Lemman 6.1 kohta (d) pätee, eli kohta (b) pätee, eli T on jatkuva.

(4) Olkoon $h \in L^\infty([0,1])$. Näytä että funktio $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$,

$$T(f) = hf,$$

on jatkuva.

$* * *$

Koska $h \in L^\infty([0,1])$, niin $\operatorname{ess\,sup}_{[0,1]} h < \infty$. Tämä tarkoittaa sitä että ”h on rajoitettu paitsi hyvin pienessä (so. nollamittaisessa) joukossa”, eli on olemassa luku $M > 0$ ja joukko $A \subset [0,1]$ siten, että (a) $h(x) \le M$ kaikilla $x \in [0,1] \setminus A$, ja (b) $m(A) = 0$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|^2 &= \int_{[0,1]} (hf)^2 \, dm \\
&= \int_{[0,1]\setminus A} (hf)^2 \, dm \\
&\le \int_{[0,1]\setminus A} (Mf)^2 \, dm \\
&= M^2 \int_{[0,1]} f^2 \, dm = M^2 \|f\|^2,
\end{aligned}$$

joten T on jatkuva Lemman 6.1 kohdan nojalla (e), $k = M$.

(5) Näytä että jos $(x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ niin

$$(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, 4x_5, x_6, \dots) \in \ell^2.$$

Olkoon $T : \ell^2 \to \ell^2$ funktio

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, 4x_5, x_6, \dots).$$

Näytä että T on jatkuva.

* * *

Jos $(x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$, niin

$$\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty.$$

Nyt $(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots) \in \ell^2$, koska

$$\begin{aligned}
0 &\le 0 + (4x_1)^2 + x_2^2 + (4x_3)^2 + x_4^2 + (4x_5)^2 + x_6^2 + \dots \\
&\le 0 + (4x_1)^2 + (4x_2)^2 + (4x_3)^2 + (4x_4)^2 + (4x_5)^2 + (4x_6)^2 + \dots,
\end{aligned}$$

ja

$$\sum_{n=1}^\infty (4x_n)^2 = 16 \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty.$$

Sen näyttämiseksi että T on jatkuva — no, ylläoleva päättely osoittaa että $\|T(x)\|^2 \le 16\|x\|^2$, eli

$$\|T(x)\| \le 4\|x\|,$$

joten Lemman 6.1 kohdan (e) nojalla asia on pihvi.

Toisen välikokeen koealue on luvun 3 alusta Lauseen 6.5 loppuun; ja 7. harjoitusten viimeisestä tehtävästä näiden 13. harjoitusten viimeiseen tehtävään.