Analysis IV
Spring 2011
Exercises 14 ($\Leftrightarrow$ Second exam) / Answers / Suomeksi

(1) Olkoon funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Laske funktion f,

(a) $C_{\mathbb{R}}([0,1])$-normi ja
(b) $L^p([0,1])$-normi, missä $1 \leq p < \infty$.

$* * *$

Katso Harj. 10 t. 2.

(2) Olkoon $z_n = (1+i)n^{-1/3}$. Osoita, että $\{z_n\} \in \ell^p(\mathbb{C})$, kun $p > 3$ ja $\{z_n\} \notin l^3(\mathbb{C})$.

$* * *$

Huomaa että tässä käsitellään kompleksista ℓ^p avaruutta $\ell^p(\mathbb{C})$. Näin ollen i on kompleksiyksikkö, eli se luku jolle $i^2 = -1$, ja $|\cdot|$ on kompleksi-itseisarvo,

$$|x + iy| = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Sen näkemiseksi onko $\{z_n\} \in \ell^p$, $1 < p < \infty$, katsotaan onko

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p$$

äärellinen. Jos on, niin on; jos ei, niin ei. Nyt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |1+i|^p n^{-p/3} \\ &= (1^2 + 1^2)^{p/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p/3} \\ &= 2^{p/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p/3},\end{aligned}$$

ja aiempien analyysin kurssien nojalla tiedetään että summa $\sum_n (1/n)^{p/3}$ suppenee kun $p/3 > 1$, ja hajaantuu kun $p/3 \leq 1$. Näin ollen $\sum_n (1/n)^{p/3} < \infty$ kun $p > 3$, ja $\sum_n n^{-p/3} = \infty$ if $p = 3$.

Lopuksi, sen näyttämiseksi että $\{z_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{C})$, pitää näyttää että $\sup_n |z_n| < \infty$. Tämä on selvä, koska

$$\sup_n |z_n| = \sqrt{2} \underbrace{\sup_n n^{-1/3}}_{=1} = \sqrt{2} < \infty.$$

(3) Olkoon

$$\mathcal{P} = \{x \mid x \text{ on reaalikertoiminen polynomi }\}.$$

Määritellään sisätulo $\mathcal{P}$:ssä asettamalla

$$< x, y >= \int_0^1 x(t)y(t)\,dt.$$

Olkoot $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = a + t$ ja $x_3(t) = b + ct + t^2$.

(i) Laske sisätulot $< x_1, x_2 >$, $< x_1, x_3 >$ ja $< x_2, x_3 >$.
(ii) Määrää a, b ja c siten, että $\{x_1, x_2, x_3\}$ on ortogonaalinen joukko, so. polynomit x_1, x_2, x_3 ovat toisilleen ortogonaalisia.

* * *

(i) Sisätulot ovat:

$$\begin{aligned}
< x_1, x_2 > &= \int_0^1 a + t\,dt = a + 1/2, \\
< x_1, x_3 > &= \int_0^1 b + ct + t^2\,dt = b + c/2 + 1/3 \text{ and} \\
< x_2, x_3 > &= \int_0^1 (a+t)(b+ct+t^2)\,dt \\
&= \int_0^1 ab + (ac+b)t + (a+c)t^2 + t^3\,dt \\
&= ab + (ac+b)/2 + (a+c)/3 + 1/4.
\end{aligned}$$

(ii) Kaksi otusta x ja y ovat ortogonaalisia jos $< x, y >= 0$. Valitaan nyt a, b ja c siten että yo. kolme sisätuloa ovat arvoiltaan nollia, eli

$$\begin{cases} a + 1/2 & = 0 \\ b + c/2 + 1/3 & = 0 \\ ab + (ac+b)/2 + (a+c)/3 + 1/4 & = 0. \end{cases}$$

Ratkaisemalla tämä saadaan $a = -1/2$, $b = 1/6$ ja $c = -1$.

(4) Olkoot $\{x_n\}$ jono Hilbert-avaruuden vektoreita siten, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty, \tag{1}$$

ja määritellään

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Osoita, että $\{y_n\}$ on Cauchyn jono.

* * *

”Hilbert-avaruus” on täydellinen sisätuloavaruus: siinä on otuksia joille on määritelty sisätulo $< \cdot, \cdot >$, joka määrää (Lemma 5.5) normin $\| \cdot \|$,

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >},$$

joka puolestaan määrää metriikan $d(\cdot, \cdot)$ (Lemma 4.2),

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

ja tuon metriikan mielessä Cauchyn jonot suppenevat.

Sen näyttämiseksi että $\{y_n\}$ on Cauchyn jono, valitaan siitä alkiot y_n ja y_m, ja näytetään että mille tahansa $\epsilon > 0$ pätee

$$d(y_n, y_m) = \|y_n - y_m\| < \epsilon$$

kunhan $m, n > N$ jollekin riittävän suurelle luvulle N.

Voidaan olettaa että $n > m$. Nyt

$$\|y_n - y_m\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\|.$$

Seuraavaksi, käyttämällä kolmioepäyhtälöä $n - m - 1$ kertaa, saadaan että

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Koska summa (1) on äärellinen, niin riittävän suurella m jäännöstermi $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\|$ on mielivaltaisen pieni — erityisesti mitä tahansa lukua $\epsilon > 0$ pienempi. Näin ollen voidaan löytää N siten että

$$\|y_n - y_m\| < \epsilon$$

kun $n > m > N$, eli kun $n, m > N$.

(5) Olkoon $T : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to \mathbb{R}$ määritelty yhtälöllä

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Osoita, että T on jatkuva.

* * *

Katso Harj. 13 t. 3.