Analysis IV
Spring 2011
Exercises 14 ($\Leftrightarrow$ Second exam) / Suomeksi

(1) Olkoon funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Laske funktion f,

 (a) $C_{\mathbb{R}}([0,1])$-normi ja
 (b) $L^p([0,1])$-normi, missä $1 \leq p < \infty$.

(2) Olkoon $z_n = (1+i)n^{-1/3}$. Osoita, että $\{z_n\} \in \ell^p(\mathbb{C})$, kun $p > 3$ ja $\{z_n\} \notin l^3(\mathbb{C})$.

(3) Olkoon

$$\mathcal{P} = \{x \mid x \text{ on reaalikertoiminen polynomi }\}.$$

Määritellään sisätulo $\mathcal{P}$:ssä asettamalla

$$< x, y >= \int_0^1 x(t)y(t)\,dt.$$

Olkoot $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = a + t$ ja $x_3(t) = b + ct + t^2$.

 (i) Laske sisätulot $< x_1, x_2 >$, $< x_1, x_3 >$ ja $< x_2, x_3 >$.
 (ii) Määrää a, b ja c siten, että $\{x_1, x_2, x_3\}$ on ortogonaalinen joukko, so. polynomit x_1, x_2, x_3 ovat toisilleen ortogonaalisia.

(4) Olkoot $\{x_n\}$ jono Hilbert-avaruuden vektoreita siten, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty,$$

ja määritellään

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Osoita, että $\{y_n\}$ on Cauchyn jono.

(5) Olkoon $T : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to \mathbb{R}$ määritelty yhtälöllä

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Osoita, että T on jatkuva.