

Analyysi I, syksy 2001

Demo 5

1. Mikä on joukko

$$\text{a) } \bigcap_{j=1}^{10} [2, 3 + j], \quad \text{b) } \bigcap_{j=1}^{10} \left[2, 3 + \frac{1}{j}\right], \quad \text{c) } \bigcap_{j=1}^{\infty} \left[2, 3 + \frac{1}{j}\right], \quad \text{d) } \bigcup_{j=1}^{\infty} \left[2, 3 + \frac{1}{j}\right].$$

2. a) Osoita, että jos $B_n \subset \mathbf{R}$ on suljettu joukko $\forall n \in \mathbf{N}$, niin niiden leikkaus

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

on suljettu.

(Opastus. Riittää osoittaa, että k.o. joukon komplementti A on avoin. Mutta A on yhdiste joukoista $\mathbf{R} \setminus B_n$. Käytä lausetta 1.9.)

b) Osoita: Jos joukot B_1, \dots, B_k ovat suljettuja, niin niiden yhdiste

$$\bigcup_{j=1}^k B_j$$

on suljettu. (Sama idea kuin edellisessä tehtävässä).

3. Laske seuraavien kompleksilukujen reaali- ja imaginaariosat ja moduli, sekä piirrä k.o. luvut ja niiden liittoluvut kompleksitasoon.

$$\text{a) } \frac{3+4i}{4-3i}, \quad \text{b) } \frac{\pi+\pi^2i}{1+\pi i}, \quad \text{c) } e^{\pi i} + ie^{3\pi i/2}.$$

4. Samoin,

$$\text{a) } \frac{1}{3+i} + \frac{1}{4-i}, \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt{2+i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+i}}, \quad \text{c) } \frac{1}{ie^{\pi i} + e^{3\pi i/2}}.$$

5. Esitä jollakin tavalla (piirtäen) missä päin lukusuoraa \mathbf{R} sijaitsee piste x , kun x toteuttaa ehdon

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |x - 10| < \frac{1}{2}, & \text{b) } x \in B\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), & \text{c) } |x + 5| < 2 \\ \text{d) } |x + 5| > \frac{1}{100}, & \text{e) } x \in B\left(5, 1\right) \cap B\left(6, \frac{1}{2}\right), & \text{f) } |x - 13| < \frac{1}{13}. \end{array}$$

Esitä myös ehtojen a)-f) määräämät joukot reaalilukuväleinä.