

Analyysi I, syksy 2001

Demo 8

1. Laske seuraava raja-arvo, mikäli se on olemassa:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(2x \sqrt{3 + \frac{1}{(x+2)^2}} + x^2 \sqrt{5 + \frac{1}{(x+2)^2}} \right).$$

2. Olkoon funktio $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ määritelty kaavalla

$$f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{(1+x)^3 - 1}.$$

Määrittele f :n arvo pisteessä 0 siten, että f :stä tulee jatkuva kuvaus $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

3. Olkoot f ja g jatkuvia kuvauksia $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sekä $f(8) \neq g(8)$. Osoita käyttäen lausetta 2.17, että funktio

$$x \mapsto \frac{f(x)}{f(x) - g(x)}$$

on jatkuva jossain pisteen 8 ympäristössä.

4. Olkoon $s > 0$ annettu. Etsi joku $r > 0$ siten, että ehdosta $|x - 3| < r$ seuraa

$$\left| \frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{3^2 - 2 \cdot 3} \right| < s. \quad (1)$$

Neuvo. Pyri jälleen estimoimaan (1):n vasemmalla puolella olevaa lauseketta niin, että se on enintään $|x-3| \cdot \text{jotakin}$, missä tekijä ”jotakin” on rajoitettu esim. joukossa $|x-3| < 1$, eli $x \in]2, 4[$.

5. Samoin, olkoon $s > 0$ annettu. Etsi joku $r > 0$ siten, että ehdosta $|x - 2| < r$ seuraa

$$\left| x^4 + \frac{1}{x} - \frac{33}{2} \right| < s.$$

(Sama neuvo kuin yllä.)