Analyysi I

Jari Taskinen

12. kesäkuuta 2002

Sisältö

1 Reaaliluvut

Tavallisimmat lukujoukot, kuten luonnolliset luvut

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

kokonaisluvut

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

rationaaliluvut

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$$

ja reaaliluvut $\mathbf{R}$, ovat tuttuja jo koulukurssista. Jatkossa joukkojen $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ ja $\mathbf{Q}$ suhteen tyydymme siihen intuitioon, joka meillä näistä jo on. Toteamme vain, että kokonaislukujen joukko $\mathbf{Z}$ on otettu käyttöön siksi, että on mahdollista käsitellä, kuinka pienemmästä luonnollisesta luvusta vähennetään suurempi. Samoin, kokonaislukujen jakolaskun vaatimukset johtavat joukon $\mathbf{Q}$ käyttöön ottoon.

Joukosta $\mathbf{N}$ huomautamme vielä, että toisinaan luku 0 luetaan siihen; tällä kurssilla kuitenkaan ei. Tämä on lähinnä makuasia. Lisäksi joukkoon $\mathbf{N}$ liittyy tärkeä induktioperiaate, josta lisää piakkoin.

Reaalilukujen joukon $\mathbf{R}$ erottaa joukosta $\mathbf{Q}$ ominaisuus, jota sanotaan täydellisyydeksi; $\mathbf{R}$:llä tämä ominaisuus on, $\mathbf{Q}$:lla ei. Asiasta lisää myöhemmin. Käytännössä ei ole kovin vaikea havaita, että ”on olemassa”lukuja jotka eivät ole rationaalisia: ympyrän kehän suhde halkaisijaan; luku, jonka neliö on 2 jne.

Tutkitaan seuraavia määritelmiä:

Olkoon $\mathbf{K}$ joukko, jossa on määritelty laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$.

Määritelmä 1.0.1 Joukko $\mathbf{K}$ varustettuna edellä mainituilla laskutoimituksilla on kunta, jos laskutoimitukset toteuttavat kaikilla x, y ja $z \in \mathbf{K}$ seuraavat ehdot:

(A1) $x + y = y + x$

(A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(A3) On olemassa yhteenlaskun nolla-alkio, eli alkio $a \in \mathbf{K}$ joka toteuttaa $x + a = x$ (kaikilla $x \in \mathbf{K}$). (Yleensä merkitään tätä alkiota symbolilla 0.)

(A4) Kaikilla $x \in \mathbf{K}$ on olemassa vasta-alkio $y \in \mathbf{K}$, joka toteuttaa $x+y = 0$. Yleensä merkitään $y =: -x$.

(A5) $x \cdot y = y \cdot x$

(A6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(A7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(A8) On olemassa (kertolaskun neutraalialkio) $b \in \mathbf{K}$, $b \neq 0$, joka toteuttaa $b \cdot x = x$ kaikille $x \in \mathbf{K}$. Yleensä merkitään $b =: 1$.

(A9) Kaikilla $x \neq 0$ on olemassa käänteisalkio $y \in \mathbf{K}$, joka toteuttaa $x \cdot y = 1$. Merkitään $y =: 1/x$ tai x^{-1}.

Määritelmä 1.0.2 Olkoon $\mathbf{K}$ kunta (kuten yllä). Se on järjestetty kunta, jos $\mathbf{K}$:ssa on määritelty relaatio $<$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(B1) Kaikille $x, y \in \mathbf{K}$ pätee täsmälleen yksi ehdoista $x < y$, $x = y$, $y < x$.

(B2) Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$.

(B3) Jos $x < y$, niin kaikilla $z \in \mathbf{K}$ pätee $x + z < y + z$.

(B4) Jos $0 < x$ ja $0 < y$, niin $0 < x \cdot y$.

Määritelmä 1.0.3 Reaalilukujen joukko $\mathbf{R}$ on järjestetty kunta, joka on täydellinen. (Täydellisyys tarkoittaa, että jokaisella ylhäältä rajoitetulla osajoukolla $E \subset \mathbf{R}$ on olemassa pienin yläraja joukossa $\mathbf{R}$.)

Luonnollisten lukujen joukko on joukko $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$. Tälle joukolle pätee induktioperiaate:

Jos $S \subset \mathbf{N}$ on sellainen osajoukko että $1 \in S$ ja $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$, niin S on itse asiassa yhtä kuin joukko $\mathbf{N}$.

Lause 1.0.4 Reaalilukujen joukko on olemassa.

Seurauksia aksioomista (A1)-(A9)

- kunnan alkiot ovat 0 ja 1 yksikäsitteisiä. (Jos otetaan joku muu alkio $b \in \mathbf{K}$, joka ei ole 1, niin se ei toteuta ehtoa (A8))
- sääntöjä:

  a) jos $a + x = a + y$, niin $x = y$

  b) jos $a \cdot x = a \cdot y$ jollekin $a \neq 0$, niin $x = y$

c) yhtälöllä $x + a = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = b - a$

d) yhtälöllä $x \cdot a = b$, missä $a \neq 0$, on ratkaisu $x = \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$

e) vasta-alkioille pätee:

$$-(-x) = x$$
$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$$
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$
$$-(x + y) = (-x) + (-y) \text{ jne.}$$

Huomautus! Jatkossa tuttuun tapaan " $\cdot$ " voi jättää pois näkyvistä.

- $x \cdot y = xy$
- $20 \cdot x = 20x$
- MUTTA EI $2 \cdot 3 = 23$

Todistetaan seurauksista kohta a) ja vasta-alkion yksikäsitteisyys.

Todistus.

$$\begin{aligned} a + x &= a + y \Rightarrow \\ a + x + (-a) &= a + y + (-a) \Rightarrow \\ a + (-a) + x &= a + (-a) + y \Rightarrow \\ 0 + x &= 0 + y \Rightarrow \\ x &= y \end{aligned}$$

□

Väite: Jos $x \in \mathbf{K}$, niin sen vasta-alkio on yksikäsitteinen.

Todistus. Olkoon $b \in \mathbf{K}$ toinen x:n vasta-alkio, siis $x + b = 0$. Siis (A4)

$$\begin{aligned} x + b &= 0 \Rightarrow \\ x + b + (-x) &= -x \Rightarrow \\ x + (-x) + b &= -x \Rightarrow \\ 0 + b &= -x \Rightarrow \\ b &= -x \end{aligned}$$

□

Seurauksia aksioomista (B1)-(B4)

- jos $x \leq y$ ja $x \geq y$ niin $x = y$
- jos $x < y$ ja $a < b$ niin $x + a < y + b$

- jos $x < y$ ja $a > 0$, niin $ax < ay$

Merkintöjä:

- $x > y$ tarkoittaa $y < x$
- $x \leq y$ tarkoittaa $x < y$ tai $x = y$
- $x \geq y$ tarkoittaa $x > y$ tai $x = y$

Määritelmä 1.0.5 (Potenssiin korotus induktiolla.) Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Määritellään $x^1 := x$. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Jos x^n on määritelty, niin määritellään $x^{n+1} := x^n x$. Jos lisäksi $x \neq 0$, niin määritellään $x^0 := 1$ ja $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.

Esimerkki 1.0.6 $x^5 := xx^4 := xxx^3 := xxxx^2 := xxxxx$.

Lause 1.0.7 Jos $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ja $m, n \in \mathbf{N}$, niin pätee

a) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

b) $(x^m)^n = x^{mn}$

Todistus. a) Suoritetaan todistus induktiolla luvun $n \in \mathbf{N}$ suhteen.
1° Jos $n = 1$, niin

$$x^{m+1} = x \cdot x^m = x^m \cdot x$$

eli a) pätee.
2° Oletamme että a) pätee jollekin n, eli

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n \tag{1}$$

Tulee näyttää, että a) pätee arvolle $n + 1$, eli

$$x^{m+n+1} = x^m x^{n+1}$$

(Voimme käyttää hyväksi määritelmää 1.0.5 ja kohtaa 1°).

$$x^{m+n+1} = xx^{m+n} = xx^m x^n = x^m x x^n = x^m x^{n+1}$$

b) Induktiolla luvun n suhteen.

- Olkoon $n = 1$.

$$(x^m)^1 = x^m = x^{m1}$$

- Oletetaan että b) pätee arvolla n, eli

$$(x^m)^n = x^{mn} \tag{2}$$

On osoitettava, että se pätee arvolla $n+1$, eli

$$(x^m)^{n+1} = x^{m(n+1)}$$

Pätee, koska

$$(x^m)^{n+1} = (x^m)^n \cdot (x^m) = x^{mn} \cdot x^m = x^{mn+m} = x^{m(n+1)}$$

$\square$

Lause 1.0.8 Kahden reaaliluvun x ja y, missä $x \neq y$, välillä on aina rationaaliluku.

Määritelmä 1.0.9 Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Sen itseisarvo $|x|$ määritellään seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{kun} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Siis aina $|x| \geq 0$, olipa x mikä tahansa reaaliluku.

Lause 1.0.10 Itseisarvolla on seuraavat ominaisuudet:

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|xy| = |x||y|$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, kun $y \neq 0$

c) $|x| = |-x|$ (Todistus kohdan b) avulla, ota $y = -1$)

d) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Kolmioepäyhtälö = $\triangle$ -ey)

e) $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$

d') $|x-y| \leq |x| + |y|$

e') $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

Todistus. Todistetaan kohdat d) ja e). Määritelmästä seuraa $-|x| \leq x \leq |x|$ ja $-|y| \leq y \leq |y|$. Lasketaan puolittain yhteen:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

eli

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Nyt jälkimmäinen epäyhtälö on todistettu, lasketaan edelleen

$$|x| = |x + y + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x + y|.$$

Vastaavasti näytetään, että $|y| - |x| \leq |x + y|$. Näistä saadaan $|x + y| \geq \Big||x| - |y|\Big|$ $\square$

Esimerkki 1.0.11 Kirjoita seuraavat lausekkeet ilman itseisarvomerkkejä.

a) $|x + 2| - |x - \sqrt{3}|$

b) $\Big||x - \pi| - 8\Big|$

c) $|x^2 + 5|$

d) $|x^2 - 5|$

Ratkaisu. a)

$$\begin{cases} x + 2, & \text{kun} \quad x + 2 \geq 0 \\ -x - 2, & \text{kun} \quad x + 2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2, & \text{kun} \quad x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{kun} \quad x \leq -2 \end{cases}$$

samoin,

$$|x - \sqrt{3}| = \begin{cases} x - \sqrt{3}, & \text{kun} \quad x \geq \sqrt{3} \\ -x + \sqrt{3}, & \text{kun} \quad x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Yhteenveto

$$\begin{aligned} |x + 2| - |x - \sqrt{3}| &= \begin{cases} -x - 2 - (-x + \sqrt{3}), & \text{kun} \quad x \leq -2 \\ x + 2 - (-x + \sqrt{3}), & \text{kun} \quad -2 \leq x \leq \sqrt{3} \\ x + 2 - (x - \sqrt{3}), & \text{kun} \quad \sqrt{3} \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2 - \sqrt{3}, & x \leq -2 \\ 2x + 2 - \sqrt{3}, & -2 \leq x \leq \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3}, & x \geq \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

b)

$$\big||x-\pi|-8\big| = \begin{cases} |x-\pi-8|, & \text{kun} \quad x \geq \pi \\ |\pi-x-8|, & \text{kun} \quad x \leq \pi \end{cases}$$

Oletetaan $x \geq \pi$. Tällöin

$$|x-\pi-8| = |x-(\pi+8)| = \begin{cases} x-(\pi+8), & \text{kun} \quad x \geq \pi+8 \\ -x+(\pi+8), & \text{kun} \quad x \leq \pi+8 \end{cases}$$

Oletetaan $x \leq \pi$. Tällöin

$$|\pi-8-x| = |x-(\pi-8)| = \begin{cases} x-(\pi-8), & x \geq \pi-8 \\ -x+(\pi-8), & x \leq \pi-8 \end{cases}$$

Siis

$$\big||x-\pi|-8\big| = \begin{cases} -x+(\pi-8), & \text{kun} \quad x \leq \pi-8 \\ x-(\pi-8), & \text{kun} \quad \pi-8 \leq x \leq \pi \\ -x+(\pi+8), & \text{kun} \quad \pi \leq x \leq \pi+8 \\ x-(\pi+8), & \text{kun} \quad x \geq \pi+8 \end{cases}$$

c) $|x^2+5| = x^2+5$, koska $x^2+5 > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

d)

$$|x^2-5| = \begin{cases} x^2-5, & \text{kun} \quad x \leq -\sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x \geq \sqrt{5} \\ -x^2+5, & \text{kun} \quad -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \end{cases},$$

koska $f(x) = x^2-5 = 0$ kun $x = \pm\sqrt{5}$.

Esimerkki 1.0.12 Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$. Pätee $|x| < |y|$ jos ja vain jos $x^2 < y^2$.

Todistus. a) Oletetaan $|x| < |y|$, jos $x = 0$, niin $|x| = 0$ ja $x^2 = 0$. Koska $|y| > |x| = 0$, pätee $y \leq 0$ ja $y^2 = 0$. Siis $y^2 > x^2$. Jos $x \leq 0$, niin $|x| > 0$. Tällöin $x^2 = |x|^2 = |x||x| < |x||y| < |y||y| = y^2$. Joten, $|x| < |y| \Rightarrow x^2 < y^2$.

b) Epäsuora todistus: Oletetaan $|x| < |y|$ ei päde. Siis, $|x| \geq |y|$. Samanlainen päättely kuin edellä $\Rightarrow |x|^2 \geq |y|^2$ eli $x^2 \geq y^2$. Siten $x^2 < y^2$ ei päde. $\square$

Esimerkki 1.0.13 Ratkaise epäyhtälö $|\frac{x-1}{x+1}| < 1$.

Ratkaisu. Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $|\frac{x-1}{x+1}| < |1|$ kanssa. Yllä olevan nojalla tämä $\iff$

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 1^2 = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} < 1 \quad | \cdot (x+1)^2 \\
&\iff (x-1)^2 < (x+1)^2 \\
&\iff x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1 \\
&\iff 4x > 0 \iff x > 0.
\end{aligned}
$$

Ratkaisu on siis $x > 0$.

Esimerkki 1.0.14 Ratkaise epäyhtälö

$$x - 1 < |x+1|. \tag{3}$$

Ratkaisu. Oletetaan ensin $x + 1 \geq 0$ eli $x \geq -1$. Silloin (3) $\iff x - 1 < x + 1 \iff -1 < 1$, totta ($x$:stä riippumatta kun $x \geq -1$). Oletetaan sitten $x + 1 < 0$ eli $x < -1$. Silloin (3) $\iff x - 1 < -x - 1 \iff 2x < 0 \iff x < 0$, totta. Siis (3) toteutuu $\forall x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 1.0.15 Oletetaan, että x toteuttaa $|x - \sqrt{5}| < \frac{1}{700}$. Osoita, että

$$|x^2 - 3x - (\sqrt{5}^2 - 3\sqrt{5})| < \frac{1}{10}.$$

Ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
& |x^2 - 3x - \left((\sqrt{5})^2 - 3\sqrt{5}\right)| = |x^2 - (\sqrt{5})^2 - 3x + 3\sqrt{5}| \\
\leq \; & |x^2 - (\sqrt{5})^2| + |-3x + 3\sqrt{5}| \\
= \; & |(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})| + |-3(x - \sqrt{5})| \\
\leq \; & |x - \sqrt{5}||x + \sqrt{5}| + |-3||x - \sqrt{5}| \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Tässä $|x - \sqrt{5}| < \frac{1}{700}$. Koska $\sqrt{5} < 3$ ja $\frac{1}{700} < 1$, niin $x < 4$. Koska $\sqrt{5} < 2$ ja $\frac{1}{700} < 1$, niin $x > 1$. Siis $|x| \leq 4$ ja $|x + \sqrt{5}| \leq |x| + \sqrt{5} \leq 7$. Siten (4) on enintään

$$|x - \sqrt{5}| \cdot 7 + 3 \cdot |x - \sqrt{5}| = 10|x - \sqrt{5}| < \frac{10}{700} = \frac{1}{70} < \frac{1}{10}.$$

Esimerkki 1.0.16 Todista, että lauseke

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

on suurempi luvuista x ja y.

Todistus. Oletetaan $x \geq y$. Silloin

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x.$$

Oletetaan $y > x$. Silloin

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = \frac{1}{2}\cdot 2y = y.$$

□

1.1 R:n topologiaa

Määritelmä 1.1.1 Olkoon $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Merkitään

- $]a,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $[a,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli)
- $]a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ (puoliavoin väli)
- $]a,\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$
- $[a,\infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$

Määritelmä 1.1.2 Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(x,r) = \{y \in \mathbf{R} \mid |x-y| < r\}$$

on nimeltään x:n r-ympäristö. Samoin

$B'(x,r) = \{y \in \mathbf{R} \mid 0 < |x-y| < r\} = \{y \in \mathbf{R} \mid |x-y| < r, y \neq x\}$(punkteerattu ympäristö)

ja

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in \mathbf{R} \mid |x-y| \leq r\}\text{(suljettu ympäristö).}$$

Nämä ovat $\mathbf{R}$:n osajoukkoja. ($B' \subset B \subset \bar{B}$.)

Tehtävä 1.1.3 Olkoon $x = 2$ ja $r = \frac{1}{10}$.

$$y \in B(2, \frac{1}{10}) \iff 2 - \frac{1}{10} < y < 2 + \frac{1}{10}.$$

Samoin jos $x = 2$ ja $r = \frac{1}{1000}$

$$y \in B(2, \frac{1}{1000}) \iff 2 - \frac{1}{1000} < y < 2 + \frac{1}{1000} \iff y \in [2 - \frac{1}{1000}, 2 + \frac{1}{1000}].$$

Tehtävä 1.1.4 Kuuluuko π seuraaviin joukkoihin?

a) $B(3, \frac{1}{100})$, b) $B(3, \frac{1}{10})$

c) $B(3, \frac{1}{2})$, d) $B(3.14, \frac{1}{100})$

Määritelmä 1.1.5 Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Joukko A on avoin, jos jokaisella $x \in A$ on (jokin) ympäristö $B(x, r)$ joka sisältyy A:han.

Joukko $B \subset \mathbf{R}$ on suljettu, jos joukko $\mathbf{R} \setminus B = \{y \in \mathbf{R} \mid y \neq B\}$ on avoin.

Esimerkki 1.1.6 Suljettu väli $[a, b]$ ei ole avoin. Tarkastellaan pistettä b: ei ole olemassa mitään ympäristöä $B(b, r)$ jolle $B(b, r) \subset [a, b]$.

Esimerkki 1.1.7 Olkoon $x = 13$. Osoita $B(x, 1) \cap B(x, \frac{1}{5}) \cap B(x, \frac{1}{2}) := Y$ on x:n r-ympäristö jollekin $r > 0$.

Ratkaisu. Pätee $B(x, \frac{1}{5}) \subset B(x, \frac{1}{2}) \subset B(x, 1)$. Siis $Y = B(x, \frac{1}{5})$ eli Y on x:n $\frac{1}{5}$-ympäristö.

Määritelmä 1.1.8 Joukko $A \subset \mathbf{R}$ on avoin, jos $\forall x \in A$ on olemassa sellainen $r > 0$ että $B(x, r) \subset A$. Joukko $B \subset \mathbf{R}$ on suljettu, jos $\mathbf{R} \setminus B$ on avoin.

Lause 1.1.9 a) $\mathbf{R}$ on sekä avoin että suljettu, samoin $\emptyset$. (Muut $\mathbf{R}$:n osajoukot eivät voi olla yhtä aikaa avoimia ja suljettuja. Sen sijaan on olemassa osajoukkoja, jotka eivät ole avoimia eivätkä myöskään suljettuja, esimerkiksi $[0, 1[$)

b) Avoin väli on avoin joukko, suljettu väli on suljettu joukko.

c) Äärellinen joukko on suljettu (s.o. joukko johon kuuluu vain äärellisen monta alkiota, esim $\{\frac{1}{2}, -2, \pi, \sqrt{13}\}$ on, $\left[0, \frac{1}{10^2}\right]$ ei ole äärellinen joukko.)

d) Mielivaltaisen monen avoimen joukon yhdiste on avoin joukko.

e) Äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin joukko.

Esimerkki 1.1.10 Olkoon $A_n = \left]\sqrt{1+n}, n^2\right[\quad \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Silloin A_n on avoin väli, joten se on avoin joukko. Siis

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}, n \geq 2} A_n \subset \mathbf{R}$$

on avoin.

Esimerkki 1.1.11 $]-1,2[\, \cap\,]0,3[\, \cap\,]0,10[\, = \,]0,2[$

Esimerkki 1.1.12 Olkoon $n \in \mathbf{N}, A_n := \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[$ (avoimia joukkoja). Ja olkoon

$$B := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Väite: $B = \,]0,1]$.

Todistus. Ensiksi, Osoitetaan että

$$]0,1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[=: B.$$

Olkoon näet $x \in \,]0,1]$. Tällöin $x \in \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[= A_n \forall n$. Siis $x \in B$, eli $]0,1] \subset B$.

Kääntäen, olkoon $y > 1$. Valitaan n s.e. $\frac{1}{n} < y - 1$. Tällöin $y \notin \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[= A_n$. Siis $B = \,]0,1]$. Puoliavoin väli ei ole avoin joukko.

Äärettömän monen avoimen joukon leikkaus ei siten ole välttämättä avoin. □

1.2 Kompleksiluvut

$\mathbf{R}^2$ on lukuparien (a,b), missä a ja b reaalilukuja, muodostama joukko. (Käytetään myös esitystä $(a,b) = a\bar{i} + b\bar{j}$, missä $\bar{i} = (0,1)$ ja $\bar{j} = (0,1)$.) Sanotaan, että (a,b) on lukupari, piste, vektori, tason alkio joukossa $\mathbf{R}^2$. On määritelty vektoreiden yhteenlasku

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

ja reaaliluvulla $r \in \mathbf{R}$ kertominen

$$r(a,b) = (ra, rb).$$

Määritellään nyt kertolasku kaavalla.

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, bc + ad) \quad \text{missä } a,b,c,d \in \mathbf{R} \tag{5}$$

On mahdollista osoittaa että joukko $\mathbf{R}^2$ varustettuna edellä mainitulla yhteenlaskulla ja kertolaskulla (5) toteuttaa kanta-aksioomat (A1) - (A9).

Merkitään: $(0,1) = i$ ja $(a,b) = a + ib$.

Joukkoa $\mathbf{R}^2$ varustettuna edellä mainituilla laskutoimituksilla sanotaan kompleksilukujen joukoksi (kunnaksi), ja merkitään $\mathbf{C}$:llä.

Kaava (5) saa muodon

$$(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(bc + ad).$$

Huom! $(0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0)$ eli $i^2 = ii = -1$.

Jos $a, b \in \mathbf{R}$, niin lukua $a+ib$ sanotaan kompleksiluvuksi, ja a on sen reaaliosa ja b imaginaariosa.

Määritelmä 1.2.1 Luku $|a+ib| := \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ on kompleksiluvun $a+ib$ itseisarvo eli moduli.

Esimerkki 1.2.2 Laske seuraavien kompleksilukujen reaali- ja imaginääriosat.

1. $3(2+i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot i = 6 + 3i$.
2. $\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5}i) = (\sqrt{2}^2) - \sqrt{2}\sqrt{5}i = 2 - \sqrt{10}i$.
3. $3i(2+i) = 3i \cdot 2 + 3i \cdot i = 6i + 3i^2 = 6i - 3$.
4. Olkoon $x, y \in \mathbf{R}$. $(x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2$.
5. $4i(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = 4i(\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}2i - \sqrt{2}2 - \sqrt{2}i\sqrt{2}i)$
$$\begin{aligned} &= 4i(2 + 2\sqrt{2}i - 2i - 2\sqrt{2} \cdot (-1)) \\ &= 4i(2 + 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} - 2)) \\ &= 8i + 8\sqrt{2}i + 4 \cdot (-1)(2\sqrt{2} - 2) \\ &= \underbrace{i(8 + 8\sqrt{2})}_{\text{Im-osa}} - \underbrace{8\sqrt{2} + 8}_{\text{Re-osa}}. \end{aligned}$$
6. $4i^5 + 3i^3 = 4(i^2 \cdot i^2 \cdot i) + 3i^2 \cdot i = 4 \cdot (-1) \cdot (-1)i + 3 \cdot (-1) \cdot i = 4i - 3i = i$
7. $(i^3+1)(4i^4+i^2) = (i^2 \cdot i + 1)(4 \cdot i^2 \cdot i^2 - 1) = (-i+1)(4-1) = 3 - 3i$

Olkoon $z \in \mathbf{C}, z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}$. Merkitään $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ on moduli eli itseisarvo.

Esimerkki 1.2.3 $|3 - 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Esimerkki 1.2.4 $|i| = \sqrt{0 + 1^2} = 1$ joten $|i|^k = 1, \forall k \in \mathbf{N}$.

Olkoon $z = x + iy$ kuten yllä. z:n liittoluku määritellään $\overline{z} = x - iy$. Pätee

$$z\overline{x} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - iy + iy - i^2 y = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Siis, $z\overline{z} = |z|^2 \forall z \in \mathbf{C}$.

Kompleksilukujen kertolaskun tärkein motivaatio on se, että jokaisella $z = x + iy \neq 0$ on käänteisalkio z^{-1} eli $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{x + iy} = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{6}$$

(Tällöin $z\overline{z}^{-1} = 1 = z^{-1}z$:

$$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = (x+iy)(x-iy)\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = (x^2+y^2)\frac{1}{x^2 + y^2} = 1.)$$

Kompleksilukujen jakolasku määritellään ($z = x + iy, w = a + ib, x, y, a, b \in \mathbf{R}$)

$$\frac{z}{w} := z \cdot w^{-1} =: \frac{x + iy}{a + ib} := \frac{ax + by}{a^2 + b^2} + i\frac{ay - bx}{a^2 + b^2}.$$

Laske seuraavien kompleksilukujen reaali- ja imaginääriosat.

Esimerkki 1.2.5 $\dfrac{1}{2 + i} = \dfrac{2}{5} - i\dfrac{1}{5}$ (kaava (6), $x = 2, y = 1$).

Toinen tapa: lavennetaan nimittäjän liittoluvlla

$$^{2-i)}\frac{1}{2 + i} = \frac{2 - i}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 - i}{2^2 - i^2} = \frac{2 - i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

Moduli: $\left|\frac{1}{2+i}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(Huom! Modulille pätee: Jos $z, w \in \mathbf{C}$, niin $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$. Edellä, $\left|\frac{1}{2+i}\right| = \frac{1}{|2+1|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$)

Esimerkki 1.2.6 $^{\sqrt{2}+i)}\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}+1^2} = \dfrac{1}{3}(\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}i - 1) = \dfrac{1}{3}(1 + 2\sqrt{2}i) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{2}i.$

Esimerkki 1.2.7 $^{3-i)}\dfrac{1}{3+i} + ^{4-i)}\dfrac{2}{4+i} = \dfrac{3-i}{3^2+1^2} + \dfrac{8-2i}{4^2+1} = \dfrac{3-i}{10} + \dfrac{8-2i}{17} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{8}{17} - \dfrac{i}{10} - \dfrac{2i}{17} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{8}{17} - i\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{17}\right)$. Reaaliosa on $\frac{3}{10} + \frac{8}{17}$, imaginääriosa on $\frac{1}{10} + \frac{2}{17}$.

Esimerkki 1.2.8 Olkoon $x \in \mathbf{R}$.

$$
\begin{aligned}
& ^{2+i)}\frac{x+ix^2}{2-i} + ^{2-i)}\frac{x^2+ix}{2+i} \\
= \; & \frac{(2+i)(x+ix^2)}{2^2+1} + \frac{(2-i)(x^2+ix)}{2^2+1} \\
= \; & \frac{2x+ix+2ix^2-x^2}{5} + \frac{2x^2-ix^2+2ix-i^2x}{5} \\
= \; & \frac{1}{5}(2x+ix+i2x^2-x^2+2x^2-ix^2+2ix+x) \\
= \; & \frac{1}{5}(3x+x^2+i(3x+x^2)) \\
= \; & \underbrace{\frac{3x+x^2}{5}}_{\text{Re osa}} + i\underbrace{\frac{3x+x^2}{5}}_{\text{Im osa}}.
\end{aligned}
$$

Kyseessä olevan luvun moduli:

$$
\left|\frac{3x+x^2}{5} + i\frac{3x+x^2}{5}\right| = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{3x+x^2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5}\left|3x+x^2\right|.
$$

1.3 Napakoordinaattiesitys

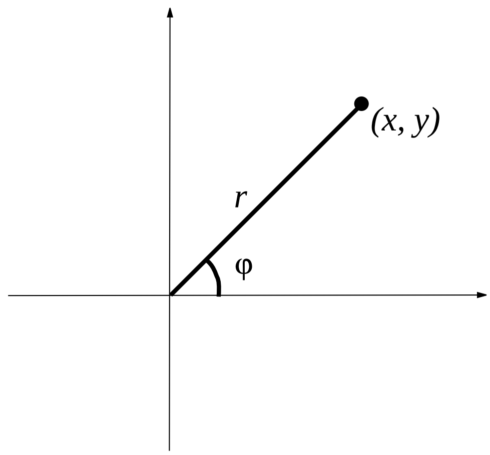
Kuva (1) havainnollistaa napakoordinaattiesitystä: $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

Siis,

$$
\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ ja } \varphi = \overline{\text{arc}}\tan\frac{y}{x}.
$$

Siirrytään kompleksitasoon; z olkoon $z = x+iy$. Edeltä saadaan $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Mainitsemme ilman todistusta, että imaginääriselle exponentille pätee

$$
e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ (Eulerin kaava)}
$$



Kuva 1: Napakoordinaattiesitys

missä $\varphi \in [0, 2\pi]$ tai $\varphi \in \mathbf{R}$.

Kompleksiluvuille saadaan siis esitys

$$z = re^{i\varphi}, r = |z|, \varphi \text{ argumentti eli vaihekulma.}$$

Imaginaariselle exponentille pätevät tutut laskusäännöt, esim.

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}, a, b \in \mathbf{R}.$$

Olkoon $z = re^{i\varphi}, w = se^{i\theta}, \varphi, \theta, \in \mathbf{R}$. Tällöin siis

$$zw = (re^{i\varphi})(se^{i\theta}) = rse^{i(\varphi+\theta)}.$$

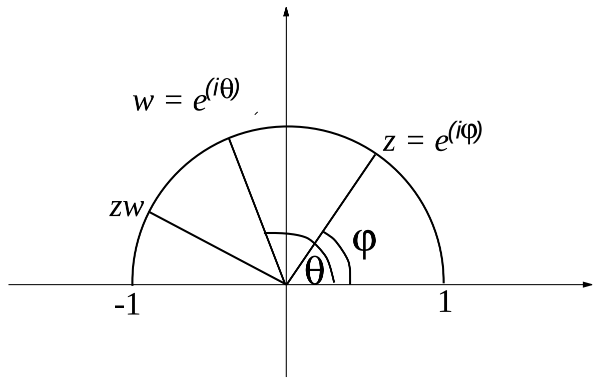
Katso kuva (2).

Havainto:

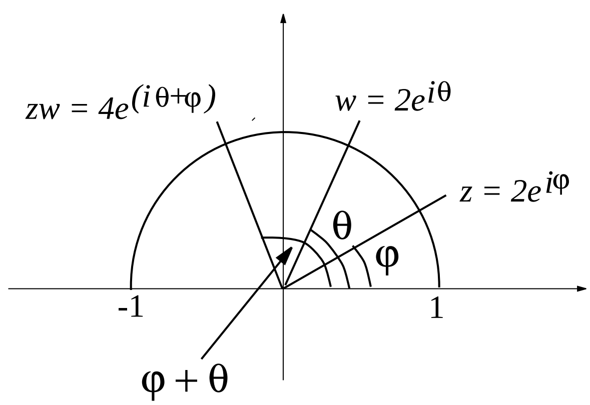
Kompleksilukujen kertolaskussa

- vaihekulmat lasketaan yhteen
- modulit kerrotaan keskenään

Katso kuva (3).



Kuva 2: Napakoordinaattiesitys 2



Kuva 3: Napakoordinaattiesitys 3

1.4 Reaalilukujonoista

Jos jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbf{N}$ kohti valitaan joku reaaliluku $x_n \in \mathbf{R}$, saadaan (reaaliluku)jono

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

jota merkitään myös $(x_n)_n^\infty = 1$, tai $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. (Täsmällinen määritelmä: lukujono on kuvaus eli funktio joukosta $\mathbf{N}$ joukkoon $\mathbf{R}$.)

Esimerkki 1.4.1 $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^\infty = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots)$, $\left(\frac{\cos n}{\sin(n\pi)+3}{}_{n=1}^\infty\right)$, $\left(n^{100} + \frac{n}{3}\right)_{n=1}^\infty$.

Sanomme, että x_n on jonon n:s alkio tai n:s koordinaatti.

Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Jono

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \text{ eli } (x_n)_{n=1}^k$$

on äärellinen lukujono. (Esim. $\mathbf{R}^2 = \{(a, b)\}$.)

Määritelmä 1.4.2 Jono $(x_n)_{n=1}^\infty$ suppenee raja-arvoon $a \in \mathbf{R}$, jos seuraava pätee. Jokaista mielivaltaista $r > 0$ kohti voidaan löytää luku $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < r, \text{ kun } n \geq N$$

Tällöin merkitään $\lim_{x\to\infty} X_n = a$.

Jos $(x_n)_{n=1}^\infty$ ei suppene (mihinkään reaalilukuun), se hajaantuu.

Esimerkki 1.4.3 Tarkastellaan jonoa

$$\left(\frac{1}{n+3} + 2\right)_{n=1}^\infty = (2 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{5}, 2 + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{7}, \ldots).$$

Näyttää suppenevan kohti lukua 2. Kuinka tämä todistetaan käyttäen määritelmää 1.10?

Ratkaisu. Olkoon $r > 0$ mielivaltainen.
1. Tarkastellaan lauseketta

$$|x_n - a|, \text{ missä } \frac{1}{n+3} + 2 = x_n \text{ ja } a = 2;$$

siis

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n+3} + 2 - 2\right| = \left|\frac{1}{n+3}\right| = \frac{1}{n+3}$$

2. Tarkastellaan milloin

$$|x_n - a| < r \text{ eli } \frac{1}{n+3} < r. \tag{7}$$

Tämä voidaan esim. käsittää epäyhtälönä n:lle, missä n voidaan ratkaista r:n avulla.

$$(7) \iff n + 3 > \frac{1}{r} \iff n > \frac{1}{r} - 3.$$

Otetaan joku $N \in \mathbf{N}$ joka on suurempi kuin $\frac{1}{r} - 3$. Jos nyt $n > N$, niin

$$n > N \geq \frac{1}{r} - 3 \Longrightarrow |x_n - a| < r.$$

Esimerkki 1.4.4 Tarkastellaan jonoa $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots) = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. Suppeneeko tämä jono?

Ratkaisu. 1. Suppeneeko jono esim. arvoon $a = 1$?

Tarkastellaan lauseketta

$$|X_n - a| = |(-1)^n - 1| = \begin{cases} |-2| = 2, & \text{jos } n \text{ pariton} \\ 0, & \text{jos } n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Oletetaan esimerkiksi $r = \frac{1}{100}$. Päteekö nyt

$$|x_n - a| < \frac{1}{100}, \forall\ n \geq N?$$

Mutta olipa N miten suuri tahansa, aina löytyy parittomia lukuja $n > N$ jolloin $|x_n - a| = 2$. Yllä oleva epäyhtälö ei päde $\forall n \geq \mathbf{N}$, joten jono ei suppene arvoon 1.

2. Suppeneeko jono johonkin muuhun $a \in \mathbf{R}$?

Tutkitaan jälleen lauseketta

$$|x_n - a| = |(-1)^n - a| = \begin{cases} |-1 - a|, & n \text{ pariton} \\ |1 - a|, & n \text{ parillinen} \end{cases} = \begin{cases} |1 + a|, & n \text{ pariton} \\ |1 - a|, & n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Jompikumpi näistä on suurempi kuin 1, olipa a mikä tahansa reaaliluku.

Jos taas esim. $r = \frac{1}{10}$, niin joko parittomille tai parillisille n

$$|x_n - a| \geq 1 > \frac{1}{10}$$

eli $|x_n - a| < \frac{1}{10}$ ei päde. Näin ollen jono ei suppene a:han.

Määritelmä 1.4.5 Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono. Tämä jono on

a) nouseva, jos $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$

b) laskeva, jos $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$

c) aidosti nouseva, jos $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$

aidosti laskeva, jos $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$

Jono on monotoninen, jos se on joko nouseva tai laskeva.

Olkoon $N \in \mathbf{N}$. Jono (a_n) on

d) nouseva indeksistä N alkaen, jos $a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \dots$

e) laskeva indeksistä N alkaen, jos $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq \dots$

Tässä ei siis ole merkitystä sillä, miten ensimmäiset jonon alkiot käyttäytyvät.

Lause 1.4.6 Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nouseva jono indeksistä N alkaen. Jos on olemassa $M \in \mathbf{R}$ s.e.

$$x_n \leq M \ \forall \ n \in \mathbf{N}, \tag{8}$$

niin jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee, ja raja-arvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin M.

Esimerkki 1.4.7 Tarkastellaan jonoa $(3, 3.3, 3.14, 3, 141, 3.1415, 3.14159, \dots)$; jonon alkio x_n on π:n arvo katkaistuna n:nen desimaalin kohdalta. Silloin $x_n \in \mathbf{Q}$. Edellä Lausessa 1.12 voidaan ottaa esim. $M = 4$. Näin ollen raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}.$$

Esimerkki 1.4.8 Tarkastellaan lukujonoa

$$(X_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

missä a on jokin kiinteä reaaliluku.

Voidaan osoittaa, että (X_n) on ylhäältä rajoitettu (eli (7) pätee) ja lisäksi nouseva, kun $n > |a|$. Lauseen 1.4.6 nojalla jonolla $\exists$ raja-arvo.

Tapauksella $a = 1$ merkitään

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \text{ (Neperin luku)}$$

Todistuksessa käytetään Bernoullin epäyhtälöä:

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \text{ kun } a > -1, n \in \mathbf{N}.$$

Todistus. Todistus induktiolla:

1° $n = 1$ (1.4.8) $\iff$ $1 + a \geq 1 + a$ tosi.
2° Induktio-oletus: (1.4.8) pätee arvolla n. Osoitetaan, että se pätee arvolla $n + 1$.

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)^n(1+a) \geq (1+an)(1+a) \geq 1+\underbrace{an + a}_{(n+1)a}+\underbrace{a^2n}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)a.$$

□

2 Reaalimuuttujan funktiot

Olkoot A, B $\mathbf{R}:n$ tai $\mathbf{C}:n$ osajoukkoja. Jos jokaista joukon A pistettä x vastaa tietty B:n piste y, sanotaan että on määritelty funktio eli kuvaus $f : A \to B$.

Määritelmä 2.0.9 Sanomme että y on alkion x kuva, merkitään myos $f(x)$. A on kuvauksen f lähtöjoukko, B maalijoukko.

Jos on annettu osajoukko $A_1 \subset A$, niin merkitään

$$f(A_1) = \Big\{ y \in B \;\Big|\; \exists x \in A_1 \text{ s.e. } y = f(x) \Big\}$$

Esimerkki 2.0.10 $A =]-2, 5[$, $B = [-100, 100]$, $f(x) = x^2+1$, $f = A \to B$. Olkoon $A_1 = [0, 1]$. Silloin A_1:n kuva $f(A_1) = [1, 2]$.

Määritelmä 2.0.11 Jos A, B, f kuten yllä, $y \in B$ ja x toteuttaa $f(x) = y$, niin x on y:n (eräs) alkukuva.

Funktiolla on aina se ominaisuus, että jokaisella lähtojoukon alkiolla on täsmälleen yksi kuva; maalijoukon alkiolla voi olla $0, 1$ tai useampia alkukuvia.

Esimerkki 2.0.12 $A =]-2, 5[$, $B = [-100, 100]$, $f(x) = x^2 + 1$. Joukon B alkiolla 2 on kaksi alkukuvaa: 1 ja -1. Alkiolla 72.83 ei ole alkukuvia joukossa A.

Jos $B_1 \subset B$, $(A, B, f$ kuten edellä) on joukko

$$f^{-1}(B_1) = \Big\{ x \in A \;\Big|\; f(x) \in B_1 \Big\}$$

B_1:n alkukuva.

- Jos kuvaukselle f pätee $f(A) = B$, niin f on surjektio (A:sta B:lle).
- Jos kuvaukselle f pätee: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, niin f on injektio (tässä $x_1, x_2, \in A$ mielivaltaisia).
- Jos f on sekä surjektio että injektio, niin se on bijektio.

Esimerkki 2.0.13 $f(x) := x^2 + 1$.

ei ole injektio eikä surjektio kun $A =]-2, 5[,\ B = [-100, 100]$

ei ole injektio, on surjektio kun $A =]-2, 5[,\ B = [1, 26[$

on injektio, ei ole surjektio kun $A =]0, 5[,\ B = [-100, 100]$

on injektio ja surjektio kun $A =]0, 5[,\ B =]1, 26[$

Esimerkki 2.0.14 Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Identtinen kuvaus $f(x) = x$ on bijektio $f : A \to A$.

Määritelmä 2.0.15 Olkoon $f : A \to B$ ja $A_1 \subset A$. Kuvaus $g : A_1 \to B$ joka määritellään kaavalla $g(x) = f(x) \quad \forall x \in A_1$ on nimeltään f:n rajoittuma joukkoon A_1. Merkitään $g = f|_{A_1}$.

Huomautus 2.0.16 Kaksi kuvausta $f : A \to B$ ja $g : C \to D$ ovat samat jos

1. $A = C$
2. $B = D$
3. $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$

Esimerkki 2.0.17 Olkoon $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Jos muuta ei ole sanottu, niin maalijoukko on $\mathbf{R}$, ja lähtöjoukko mahdollisimman suuri joukko, jossa lauseke on määritelty, tässä $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

2.1 Polynomit

Polynomi on funktio $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ joka on muotoa

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

missä $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ovat vakioita (polynomin kertomia). Polynomi voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Jos $a_n \neq 0$, on P:n asteluku n. Jos $a_n = 0 \quad \forall n$, niin sanomme, että P on $0-$polynomi.

Lause 2.1.1 (Jakoyhtälö) Olkoot P ja Q polynomeja, Q ei 0-polynomi. Tällöin on olemassa polynomit A ja R, joille

$$P = AQ + R,$$

missä R:n aste on alempi kuin Q:n aste, tai R on $0-$ polynomi. Polynomit A ja R ovat yksikäsitteiset.

Todistus. Tarkastellaan joukkoa

$$\mathcal{E} := \left\{ P - AQ \;\middle|\; A \text{ on polynomi} \right\}$$

Siis, $\mathcal{E}$ on polynomeista koostuva joukko; siihen kuuluvat ne polynomit jotka ovat muotoa $P - AQ$, missä A on polynomi.

Jos 0-polynomi kuuluu joukkoos $\mathcal{E}$, niin siis olemassa A s.e. $Q = P - AQ$ eli $P = AQ$. Tällöin voidaan valita $R = 0$ ja lause on todistettu.

Muussa tapauksessa olkoon R joukon $\mathcal{E}$ alinta astetta oleva polynomi; olkoon A_0 vastaava A. Siis, $R = P - A_0Q$ eli $P = A_0Q + R$.

Väite. R:n asteluku n on pienempi kuin Q:n asteluku m.

Jos pätee $n \geq m$, merkitään

$$\begin{array}{rcr} R & = & r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_0 \\ Q & = & q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_0 \end{array}$$

tällöin

$$R - \frac{r_n}{q_m}x^{n-m}Q = P - (A_0 + \frac{r_n}{q_m}x^{n-m})Q \in \mathcal{E}$$

Toisaalta,

$$\begin{aligned} R - \tfrac{r_n}{q_m}x^{n-m}Q &= r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_0 - \underbrace{\frac{r_n}{q_m}x^{n-m}(q_m x^m}_{-r_n x^n + \ldots x^{n-1} + \ldots} + \ldots + q_0) \\ &= \ldots x^{n-1} + \ldots x^{n-2} + \ldots \end{aligned}$$

eli n:s aste supistuu pois!

Yhteenvetona, polynomi

$$R - \frac{r_n}{q_m}x^{n-m}Q$$

1) kuuluu joukkoon $\mathcal{E}$

2) on enintään astetta $n - 1$.

Tämä on ristiriita, koska R;n aste on n; pätee $m > n$. $\square$

Käytännössä A ja R löydetään jakokulman avulla.

$$P = x^3 + x^2 + x + 1, \quad Q = x^2 + 1$$

Jaetaan jakokulmassa $x^3 + x^2 + x + 1$ polynomilla $x^2 + 1$, saadaan $x + 1$. Tällöin $A = x + 1$, $R = 0$.

Esimerkki 2.1.2 $P = x^3 + 3x^2 - x - 1$, $Q = x + 2$. Jaetaan jakokulmassa $x^3 + 3x^2 - x - 1$ polynomilla $x + 2$, saadaan $x^2 + x - 3$ ja jakojäännökseksi 5. Siis, $A = x^2 + x - 3$ ja $R = 5$. Voidaan tarkistaa laskemalla, että

$$QA + R = (x + 2)(x^2 + x - 3) + 5 = x^3 + 3x^2 - x - 1 = P.$$

Olkoon P polynomi ja olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$. Jakoyhtälön avulla voidaan kirjoittaa

$$P(x) = (x - x_0)A + R, \tag{9}$$

missä $Q = x - x_0$, Q:n aste $\deg(Q) = 1$, ja siten $\deg(R) = 0$. Siis R on vakio (mahdollisesti jopa 0).

Oletetaan, että x_0 on polynomin P:n 0-kohta, $P(x_0) = 0$. Silloin (9) $\Rightarrow$

$$P(x_0) = (x_0 - x)A(x_0) + R(x_0) \iff 0 = R(x_0)$$

(syötetään (9):ssä x:n paikalle x_0). Koska R on vakio ja $R(x_0) = 0$, niin R on 0-polynomi.

Lause 2.1.3 Jos polynomilla P on 0-kohta x_0, niin se voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = (x - x_0)A(x)$$

missä A on polynomi jolle deg(A) = deg(P) -1 .

Lause 2.1.4 Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Jos n:n asteen polynomilla P on 0-kohdat $x_1, \ldots, x_n$ niin P voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \quad \left(=: a_n\Pi_{j=1}^{n}(x - x_j)\right).$$

(Tässä a_n on P:n korkeimman asteen termin kerroin.)

Todistus. Seuraa lauseesta (2.1.3). $\square$

Seuraus 2.1.5 *n:n asteen polynomilla on enintään n kpl eri 0-kohtia.*

Todistus. Jos 0-kohtia m kpl, missä $m > n$, niin lauseesta (2.1.4) seuraa

$$P(x) = a_n \Pi_{j=1}^{m}(x - x_1) = \underbrace{a_n}_{\neq 0} x^m + x^{m-1} + \dots$$

eli P olisi m:n asteen polynomi, Ristiriita. $\square$

Määritelmä 2.1.6 Jos polynomi P voidaan esittää muodossa

$$P(x) = (x - x_0)^m Q(x),$$

missä Q on polynomi, $m \in \mathbf{N}$, niin x_0 on P:n m:n kertaluvun 0-kohta.

Esimerkki 2.1.7 Olkoon $P(x) = x^4$. Piste $x_0 = 0$ on P:n 4. kertaluvun 0-kohta.

Esimerkki 2.1.8 Olkoon $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$. Piste $x_0 = 1$ on 3. kertaluvun 0-kohta.

Lause 2.1.9 Olkoon P polynomi, jolle $\deg(P) = n$. Oletetaan, että P:llä on pisteissä $a_1, a_2, \dots, a_M$ 0-kohdat ja että 0-kohdan a_j kertaluku on m_j.

Oletetaan että $m_1 + m_2 + \dots + m_M = n = \deg(P)$. Silloin polynomi P voidaan esittää muodossa

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_M)^{m_M}.$$

Emme todista tätä lausetta tässä.

2.2 Algebrallisista yhtälöistä

Tarkastellaan yhtälöitä, jotka ovat muotoa

$$P(x) = 0, \tag{10}$$

missä P on polynomi. 1. Jos $\deg(P) = 1$, niin (10) on muotoa

$$ax + b = 0,$$

missä a ja b ovat vakioita. Tällä on 1-käsitteinen ratkaisu $x = -\frac{b}{a}$.
2. Olkoon $\deg(P) = 2$. Silloin (10) on muotoa

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{11}$$

missä a, b, c annettuja reaalilukuja.

a) Jos $b^2 - 4ac \geq 0$, niin (11):n ratkaisu on

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos $b^2 - 4ac = 0$, on vain yksi ratkaisu $x = -\frac{b}{2a}$, joka on siis P:n 2-kertainen 0-kohta.

b) Jos $b^2 - 4ac < 0$, niin (11):llä ei ole reaalisia ratkaisuja. Kompleksiset ratkaisut ovat

$$x = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Ne ovat toistensa liittolukuja.

Esimerkki 2.2.1 Tarkastellaan yhtälöä $ax^4 + cx^2 + f = 0$. Kirjoitetaan $x^2 = z$, $x = \pm\sqrt{z}$. Ratkaisu on

$$z = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4af}}{2a},$$

joten alkuperäisen yhtälön ratkaisu on

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4af}}{2a}},$$

kun neliöjuurien alla olevat lausekkeet ovat positiivisia.

Esimerkki 2.2.2 Kolmannen asteen yhtälö

$$z^3 + pz + q = 0. \tag{12}$$

missä p, $q \in \mathbf{R}$, ratkaistaan Cardanon kaavalla.

Cardanon kaavat antavat yleisen 3:nnen asteen yhtälön algebrallisen ratkaisun:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
z_2 &= \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
z_3 &= \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Lauseketta $D := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ sanotaan diskriminantiksi. Erotetaan kolme tapausta:

1. $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} > 0 \Rightarrow$ (12):llä on 1 reaaliarvoinen ratkaisu, 2 kompleksista ratkaisua, jotka ovat toistensa liittolukuja.

2. $D = 0$. Ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\sqrt[3]{-q/2} \\ z_2 &= z_3 = -\sqrt[3]{-q/2}, \end{aligned}$$

3. $D < 0$, 3 reaalista ratkaisua.

2.3 Rationaalifunktiot

Rationaalifunktio R on funktio, joka voidaan esittää muodossa

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

missä P, Q polynomeja ja $x \in \mathbf{R}$, se on määritelty niille x, joille $Q(x) \neq 0$.

Määritelmä 2.3.1 Jos x_0 on Q:n nollakohta ja $P(x_0) \neq 0$, niin x_0 on R:n napa.

Rationaalifunktion jakaminen osamurtolukuihin

Erotetaan 4 erilaista tapausta.

Tapaus 1. Olkoon R rationaalifunktio, $R = \frac{P}{Q}$, deg $P \geq$ deg Q. Haluamme kirjoittaa sen muodossa

$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q} \tag{13}$$

missä P_1, P_2 polynomeja joille deg $(P_2) <$ deg (Q). Mutta tämä seuraa jakoyhtälöstä lause (2.1.1).

$$\exists\ A, S \text{ s.e.} \quad P = AQ + S,\ \deg S < \deg Q \Rightarrow R = \frac{AQ + S}{Q} = A + \frac{S}{Q}.$$

saamme esityksen (13) valitsemalla $P_1 = A$, $P_2 = S$.

Esimerkki 2.3.2

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^2}{x-1} \quad (P(x) = x^2, \quad Q(x) = x-1) \\ &= \frac{x^2+1-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \underbrace{x+1}_{P_1} + \underbrace{\frac{a}{x-1}}_{P_2}. \end{aligned}$$

Seuraavassa tarkastellaan rationaalifunktioita, joilla $\deg(P) < \deg(Q)$ ($R = P/Q$).

Tapaus 2. Oletetaan, että $\deg\,(Q) = n$ ja Q:lla on keskenään erisuuret 0-kohdat $x_1, \ldots x_n$. Tällöin $R = \dfrac{P}{Q}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{P}{a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \qquad \in \mathbf{R} \\ &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n} \end{aligned}$$

missä $A_1, \ldots, A_n$ ovat vakioita. Tämän jälkeen funktion R integrointi on helppoa, sillä

$$\int \frac{A}{x-x_1} = A\log(x-x_1).)$$

Todistetaan väite tapauksessa $n = 2$. Silloin

$$R(x) = \frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}, \quad x_1 \neq x_2$$

halutaan esittää muodossa

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2},$$

missä $A_1, A_2 \in \mathbf{R}$.

Kirjoitetaan

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} \qquad \Big| \cdot (x-x_1)(x-x_2)$$

minkä tulisi päteä kaikilla $x \in \mathbf{R}$!

Tästä on määrättävä luvut A_1, A_2. Poistetaan nimittäjät $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & ax+b = A_1(x-x_2)+A_2(x-x_1) \\ \iff \quad & ax+b = (A_1+A_2)x - A_1x_2 - A_2x_1 \end{aligned}$$

Tämän tulee päteä kaikille $x \in \mathbf{R}$, joten

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a &= A_1 + A_2 \\ b &= -A_1x_2 - A_2x_1 \end{cases} \\ \iff \quad & \begin{cases} a &= A_1 + A_2 \\ -b &= A_1x_2 + A_2x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Saimme siis yhtälöparin tuntemattomille A_1 ja A_2. Tämän yhtälöparin determinantti on

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 \neq 0.$$

Siten A_1 ja A_2 voidaan aina ratkaista.$\square$

Esimerkki 2.3.3 Seuraava menetelmä ei perustu yllä olevaan todistukseen. Määritämme vakiot A_1, A_2, A_3 siten että

$$R(x) := \frac{1}{\underbrace{x(x-1)(x+1)}} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}, \tag{14}$$

missä

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$

on annettu rationaalifunktio, $\deg P = 0$, $\deg Q = 3$, ja Q:lla on 0-kohdat $0, 1$ ja -1.

Ratkaisu.

1. Kerrotaan (14) puolittain "1. nimittäjällä"x

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = A_1 + x\frac{A_2}{x-1} + x\frac{A_3}{x+1}.$$

2. Asetetaan $x = 0$ (Q:n vastaava 0-kohta)

$$\frac{1}{(0-1)(0+1)} = A_1 + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots \qquad \iff A_1 = -1.$$

3. Sijoitetaan (14):een $A_1 = -1$ ja kerrotaan "2:lla nimittäjällä"$x-1$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x}(x-1) + A_2 + \frac{A_3}{(x+1)}(x-1).$$

4. Sijoitetaan $x = 1$ ("Q:n 2. 0-kohta")

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 0 + A_2 + 0 \Longrightarrow A_2 = \frac{1}{2}.$$

5. Sijoitetaan (14):een $A_2 = \frac{1}{2}$; kerrotaan (14) "3. nimittäjällä" $x + 1$

$$\frac{1}{x(x-1)} = (x+1)\frac{-1}{x} + (x+1)\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + A_3.$$

6. Sijoitetaan $x = -1$.

$$\frac{1}{-1 \cdot (-2)} = A_3 \Longrightarrow A_3 = \frac{1}{2}.$$

Vastaus:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1},$$

joka pätee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ poislukien nimittäjän nollakohdat. Edelleen

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + C = \frac{1}{2}\log\frac{|x^2-1|}{x^2} + C.$$

Esimerkki 2.3.4 Määrää A_1, A_2, A_3 ja A_4 siten, että

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-3)} + \frac{A_4}{(x-4)}. \quad (15)$$

1° A_1: kerrotaan $x - 1$:lla:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-2)(x-3)(x-4)} &= A_1 + (x-1)(\ldots) \quad \text{(sijoitetaan } x = 1 \Rightarrow \text{)} \\ \frac{1}{(1-2)(1-3)(1-4)} &= A_1 \Longrightarrow A_1 = \tfrac{-1}{2 \cdot 3} = -\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

2° A_2: kerrotaan (15) $x - 2$:lla

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x-3)(x-4)} &= A_2 + (x-2)(\ldots) \quad \text{(sijoitetaan } x = 2 \Rightarrow \text{)} \\ \frac{1}{1 \cdot (-1) \cdot (-2)} &= A_2 \Longrightarrow A_2 = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

3° A_3: kerrotaan (15) $x - 3$:lla

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)} &= A_3 + (x-3)(\ldots) \quad \text{(sijoitetaan } x = 3 \Rightarrow \text{)} \\ \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot (-1)} &= A_3 \Longrightarrow A_3 = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

4° A_4: kerrotaan (15) $x-4$:lla

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= A_4 + (x-4)(\ldots) \quad (\text{sijoitetaan } x = 4 \Rightarrow) \\ \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} &= A_4 \Longrightarrow A_4 = \tfrac{1}{6}\end{aligned}$$

Siis,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{6}\frac{1}{x-4}$$
$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1,2,3,4\}$.

Tapaus 3. Jos Q jakautuu reaalisiin 1. asteen tekijöihin, joiden joukossa on moninkertaisia, on näitä vastaamaan asetettava niin monta osamurtolukua kuin k.o. tekijän kertaluku osoittaa.

Esimerkki 2.3.5 Olkoon

$$R(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}.$$

Tällä on kaksinkertainen nollakohta 0 ja yksinkertainen nollakohta 1.

Huomaa, että tätä ei voida kirjoittaa muotoon

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}.$$

Voidaan kuitenkin löytää vakiot A_1, A_2, A_3 siten, että

$$R(x) = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1}$$

eli

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \tag{16}$$

Ratkaisu. 1. A_3: kerrotaan (16) $x-1$:llä

$$\frac{1}{x^2} = (x-1)\frac{A_1}{x^2} + (x-1)\frac{A_2}{x} + A_3$$

sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_3 = 1$.

2. A_1: kerrotaan (16) x^2:llä

$$\frac{1}{x-1} = A_1 + \frac{x^2 \cdot A_2}{x} + x^2 \frac{A_3}{x-1}$$

sijoitetaan $x = 0$, saadaan $A_1 = -1$.

3. A_2:

$$\begin{aligned}
(16) \quad \iff \quad & \frac{1}{x^2(x-1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \\
\iff \quad & \frac{1+x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \\
\iff \quad & \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1}.
\end{aligned}$$

Kerrotaan tämä x:llä:

$$\frac{1}{x-1} = A_2 + x\frac{A_3}{x-1}.$$

Sijoitetaan $x = 0$, saadaan $A_2 = -1$.

Vastaus:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Tarkistus:

$$\begin{aligned}
& - {}^{x-1)}\frac{1}{x^2} - {}^{x(x-1))}\frac{1}{x} + {}^{x^2)}\frac{1}{x-1} \\
= \quad & -\frac{x-1}{x^2(x-1)} - \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{x^2}{x^2(x-1)} \\
= \quad & \frac{-x+1-x^2+x+x^2}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)}
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.3.6 Etsi luvut $A_1, \ldots, A_5$ siten että

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x+2)^2} + \frac{A_5}{x+2}. \quad (17)$$

Ratkaisu. 1. A_1: (17) kerrotaan $(x-1)^3$:lla

$$\frac{1}{(x+2)^2} = A_1 + (x-1)(\ldots)$$

sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_1 = \frac{1}{9}$.

2. A_2: Siirretään (17):ssä termi $\frac{A_1}{(x-1)^3}$ vasemmalle puolelle ja sievennetään

$$
\begin{aligned}
{}^{9)}\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} \overset{(x+2)^2)}{-} \frac{1}{9}\frac{1}{(x-1)^3} &= \frac{9-(x+2)^2}{9(x-1)^3(x+2)^2} \\
= \frac{-x^2-4x+5}{9(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{-(x-1)(x+5)}{9(x-1)^3(x+2)^2} &= \frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2}
\end{aligned}
$$

Yhtälö (17) saadaan siis muotoon

$$
\frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + A_3 \ldots
$$

kerrotaan $(x-1)^2$:lla

$$
\frac{-x-5}{9(x+2)^2} = A_2 + (x-1)(\ldots)
$$

sijoitetaan $x=1$, saadaan $A_2 = \frac{-2}{27}$.

3. A_3: Tarkastellaan yhtälöä (17). Siirretään A_1- ja A_2-termit vasemmalle puolelle ja sievennetään

$$
\begin{aligned}
{}^{3)}\frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2} \overset{(x+2)^2)}{+} \frac{2}{27}\frac{1}{(x-1)^2} &= \frac{3(x+5)-2(x+2)^2}{27(x-1)^2(x+2)^2} \\
= \frac{2(x-1)(x+\frac{2}{7})}{27(x-1)^2(x+2)^2} &= \frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x-1)(x+2)^2}.
\end{aligned}
$$

Siis (17) pätee $\iff$

$$
\frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A_3}{x-1} + A_4(\ldots)
$$

kerrotaan $(x-1)^2$:lla

$$
\frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x+2)^2} = A_3 + (x-1)\ldots
$$

sijoitetaan $x=1$, saadaan $A_3 = \frac{2}{27}\frac{\frac{9}{2}}{3^2} = \frac{1}{27}$.

4. A_4: (17) kerrotaan $(x+2)^2$:lla

$$
\frac{1}{(x-1)^3} = A_4 + (x+2)(\ldots)
$$

sijoitetaan $x=-2$, saadaan $A_4 = \frac{-1}{27}$.

5. A_5: Siirretään (17):ssä A_4-termi vasemmalle puolelle. Tarkastellaan vasenta puolta. (Huom! A_1, A_2, A_3, A_5-termit ovat oikealla puolella.)

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} + \frac{1}{27}\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{27+(x-1)^3}{27(x-1)^3(x+2)^2}. \tag{18}$$

Tässä

$$27-(x-1)^3 = 27+x^3-3x^3+3x-1 = x^3-3x^2+3x+26 = 0$$

Tämä toteutuu kun $x=-2$. Jaetaan polynomi $x^3-3x^2+3x+26$ polynomilla $x+2$, saadaan $x^2-5x+13$.

$$(18) = \frac{x^2-5x+13}{27(x-1)^3(x+2)} = \frac{A_5}{x+2} + \ldots$$

kerrotaan $x+2$:lla ja sijoitetaan $x=-2$, saadaan $A_5 = -\frac{1}{27}$.

Tapaus 4. Jos Q sisältää tekijän x^2+px+q, missä p, q ovat reaalisia kertoimia ja ko. tekijän 0 -kohdat eivät ole reaalisia, on sitä kohti muodostettava osamurtoluku

$$\frac{A_1x+A_2}{x^2+px+q}, \quad A_1, A_2 \in \mathbf{R} \text{ ovat vakioita.}$$

Esimerkki 2.3.7 Kirjoitetaan

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+1} \tag{19}$$

missä vakiot A_1, A_2, A_3 halutaan saada sellaisiksi että (19) toteutuu kaikilla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Ratkaisu. 1.A_1: kerrotaan (19) polynomilla x.

$$\frac{1}{x^2+1} = A_1 + x\frac{A_2x+A_3}{x^2+1}.$$

Sijoitetaan $x=0$, saadaan $A_1 = 1$

2. Loput kertoimet ratkaistaan (19):stä sijoittamalla $A_1 = 1$. Saadaan

$$\frac{A_2x+A_3}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)} \overset{x^2+1)}{-} \frac{1}{x} = \frac{1-(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{-x}{x^2+1}$$

kerrotaan x^2+1:llä, saadaan

$$A_2x+A_3 = -x.$$

Koska tämän täytyy päteä kaikilla $x \in \mathbf{R}$, saadaan $A_2 = -1$ ja $A_3 = 0$.

Yhteenveto tapauksista 1-4. Rationaalifunktio $R = \frac{P}{Q}$ missä Q on tulo muotoa

$$(x-a)^n \quad \text{ja} \quad x^2 + px + q \quad (p^2 - 4q < 0)$$

olevista tekijöistä, voidaan kirjoittaa summana muotoa

$$\frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{ja} \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

olevista termeistä.

2.4 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja olkoon f reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty jossain a:n punkteeratussa ympäristössä

$$B'(a,r) := B(a,r) \setminus \{a\}$$

$(B(a,r) = \{y \in \mathbf{R} \mid |y-a| < r\})$. Tässä $r > 0$.

Määritelmä 2.4.1 Funktiolla f on pisteessä a raja-arvo b, jos jokaista lukua $s > 0$ kohti voidaan löytää sellainen luku $r > 0$ että

$$|f(x) - b| < s \tag{20}$$

kaikille x, jotka toteuttavat $|x-a| < r$.Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Ajattelutapa: f:n raja-arvo on b, jos "$f(x)$ on lähellä b:tä"kunhan "x on riittävän lähellä a:ta".

Esimerkki 2.4.2 Olkoon $f(x) = 18\ \forall x \in \mathbf{R}$ ja olkoon $a = -7$. Osoita , että

$$\lim_{x \to -7} f(x) = 18.$$

Ratkaisu. Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Tarkastellaan lauseketta

$$|f(x) - b| = |18 - 18| = 0.$$

Tämä on kaikille $x \in \mathbf{R}$ pienempi kuin s (koska $s > 0$). Valitaan esimerkiksi $r = 1$. Jos $|x - (-7)| < r$, niin $|f(x) - 18| < s$.

Esimerkki 2.4.3 Olkoon $f(x) = x^2$, $a = 10$. Osoita, että

$$\lim_{x \to 10} f(x) = 100,$$

kun $s > 0$ on annettu.

Todistus. 1. Tarkastellaan lauseketta

$$\begin{aligned} |f(x) - 100| &= |x^2 - 100| = |x^2 - 10^2| \\ &= |(x-10)(x+10)| = |x-10||x+10| \end{aligned} \tag{21}$$

Yleensä pyritään kirjoittamaan/arvioimaan ylhäältä lauseketta

$$|f(x) - 100|$$

muodossa

$$|x - 10| \cdot \text{jotakin}.$$

2. Merkitään ”jotakin”$= A(X)$. Käyttäen tietoa, että x on lähellä pistettä a (voidaan esimerkiksi aina olettaa että $|x - a| < 1$) pyritään löytämään yläraja M lausekkeelle $A(x)$. Nyt

$$A(x) = |x + 10|.$$

Pätee myös

$$|x - a| = |x - 10| < 1.$$

Näin ollen $x \in]9, 11[$, joten $A(x) \le 30$ (yhtä hyvin 100, 500, tms.). Oletetaan $M = 30$.

3. Valitaan

$$r = \frac{s}{M+1} \left(\text{tai } r = \frac{s}{M + 1000}, r = \frac{s}{10M + 10^6} \dots \right)$$

4. Todetaan että määritelmä (2.4.1) toteutuu: Jos $|x - 10| < r$, niin

$$\begin{aligned} |f(x) - 100| &< |x-10||x+10| \\ &< r \cdot M = \tfrac{s}{r+1} \cdot M = s \underbrace{\frac{M}{M+1}}_{<1} < s, \end{aligned}$$

kohdan (21) perusteella $|f(x) - 100| < s$. $\square$

Esimerkki 2.4.4 Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \text{ on rationaalinen} \\ 0, & x \text{ on irrationaalinen.} \end{cases}$$

Väite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Todistus. Olkoon $s > 0$.

1. Tarkastellaan lauseketta

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \begin{cases} |x|^3, & \text{kun } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}.$$

Siis aina

$$|f(x) - 0| \leq |x^3| = |x||x|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

2. Tämä on muotoa $|x - 0| \cdot A(x)$, missä $A(x) = |x|^2$. Jos esim. $|x - 0| < 1$, niin $|A(x)| < 10 =: M$.

3. Valitaan $r := \min\left(\frac{s}{M+1}, 1\right)$.

4. Näytetään, että määritelmä (2.4.1) pätee: Jos $|x - 0| < r$, niin

$$|f(x) - 0| \leq |x|^3 = |x| \cdot A(x) < r \cdot M \leq \frac{s}{M+1} \cdot M = s\frac{M}{M+1} < s$$

□

Lause 2.4.5 Jos funktiolla f on raja-arvo pisteessä a, niin silloin kaikille $s > 0$ voidaan löytää $r > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| < s, \quad \text{kun } |x - a| < r \text{ ja } |y - a| < r. \tag{22}$$

Tätä lausetta voidaan käyttää, kun osoitetaan, että funktiolla ei ole raja-arvoa jossakin pisteessä.

Esimerkki 2.4.6 Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kun } x > 10 \\ 1, & \text{kun } x \leq 10 \end{cases}.$$

Väite: f:llä ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 10$.

Todistus. Olkoon $s = \frac{1}{2}$ ja $r > 0$. Valitaan x siten, että

$$10 - r < x < 10,$$

mistä seuraa

$$|x - 10| < r.$$

Ja y siten, että

$$10 < y < 10 + r,$$

mistä seuraa

$$|y - 10| < r.$$

Nyt

$$|f(x) - f(y)| = |1 - 3| = 2 > s.$$

Näin ollen lause (22) ei toteudu; ei ole raja-arvoa. $\square$

Kun halutaan osoittaa määritelmän 2.4.1 avulla, että

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

niin tutkitaan lauseketta $|f(x) - b|$ ja pyritään estimoimaan sitä (kun $x \approx a$, esim. $x \in]a-1, a+1]$ eli $|x - a| < 1$) lausekkeella

$$|x - a| \cdot \text{jotakin}$$

missä ”jotakin”on rajoitettu ($\leq M$, ei riipu x:stä).

Esimerkki 2.4.7 Olkoon $f(x) = x^3 - 10\pi x$. Osoita, että

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 27 - 30\pi.$$

Ratkaisu. Pätee

$$\begin{aligned}
|f(x) - (27 - 30\pi)| &= |\underbrace{x^3 - 10\pi x}_{f} - \underbrace{(27 - 30\pi)}_{\text{raja-arvo}}| \\
&= |\underbrace{x^3 - 3^3} - \underbrace{10\pi x + 30\pi}| \\
(\triangle\text{-ey}) \quad &\leq |x^3 - 3^3| + |-10\pi x + 30\pi| \\
&= |(x-3)(x^2 + 3x + 5)| + |\underbrace{-10\pi x + 10\pi \cdot 3}_{10\pi(3-x)}| \\
&\leq |x - 3||x^2 + 3x + 5| + 10\pi|3 - x| \\
&= |x - 3| \underbrace{\Big(|x^2 + 3x + 5| + 10\pi\Big)}_{=:A(x)}.
\end{aligned}$$

Arvioidaan lauseketta $A(x)$ kun x on lähellä tarkastelupistettä, esimerkiksi kun

$$|x-3| < 1 \text{ eli } x \in \left]2,4\right[.$$

Tällöin

$$A(x) \leq |x^2| + |3x| + |5| + 10\pi \leq 16 + 12 + 5 + 10\pi \leq 100.$$

Olkoon $s > 0$. Valitaan $r = \min\left(\frac{s}{100}, 1\right)$. Silloin

$$|f(x) - b| = |f(x) - (27 - 30\pi)| \leq |x-3| \cdot 100 < r \cdot 100 \leq \frac{s}{100} \cdot 100 = s,$$

jos $|x-3| < r$.

Esimerkki 2.4.8 Osoita

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{4}.$$

Ratkaisu. Pätee

$$\left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4-x+1}{4(x-1)}\right| = \left|\frac{5-x}{4(x-1)}\right| = |x-5| \cdot \underbrace{\frac{1}{|4(x-1)|}}_{=:A(x)}$$

Oletetaan, että $x \in B(5,1) = \left]4,6\right[$. Estimoidaan $A(x)$:ää:

$$A(x) = \frac{1}{|4(x-1)|} \leq \frac{1}{4 \cdot 3} < 1.$$

Olkoon $s > 0$. Siis:

$$|f(x) - \frac{1}{4}| < s,$$

kun valitaan $r = s$ ja $|x-5| < r$.

Esimerkki 2.4.9 Olkoon $f(x) = \pi x^3 + \frac{x}{2} + \frac{1}{x+2}$. Osoita, että

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\pi + \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu. Estimoidaan:

$$\begin{aligned}
|f(x) - (-\pi + \tfrac{1}{2})| &= \pi x^3 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{x+2} - (-\pi - \tfrac{1}{2} + 1)| \\
&= |\pi x^3 + \pi + \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{x+2} - 1| \\
&\leq |\pi x^3 + \pi| + |\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}| + |\tfrac{1}{x+2} - 1| \\
&= \pi|x^3 + 1| + \tfrac{1}{2}|x+1| + |\tfrac{1-(x+2)}{x+2}| \\
&= \pi|x+1||x^2 - x + 1| + \tfrac{1}{2}|x+1| + |x+1|\tfrac{1}{|x+2|} \\
&= |x+1| \underbrace{(\pi|x^2 - x + 1| + \frac{1}{2} + \frac{1}{|x+2|})}_{=:A(x)}
\end{aligned}$$

Oletetaan, että

$$|x - (-1)| = |x+1| < 1/2$$

eli $x \in B(-1, \frac{1}{2}) = \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$. Silloin

$$A(x) \leq \pi(|x^2| + |x| + 1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{|-3/2 + 2|} \leq \pi\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} + 2 < 30.$$

Olkoon $s > 0$. Valitaan $r = \min(\frac{s}{30}, \frac{1}{2})$. Pätee

$$\left|f(x) - \left(-\pi + \frac{1}{2}\right)\right| < s, \text{ kun } |x - (-1)| < r.$$

Usein annetun lausekkeen raja-arvo lasketaan käyttäen entuudestaan tunnettuja raja-arvoja ja seuraavaa tulosta:

Lause 2.4.10 Olkoon f, g reaalimuuttujan funktioita, $x_0 \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$. Oletetaan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \tag{23}$$

ja

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = b. \tag{24}$$

Silloin pätee:

a) $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = a + b$

b) $\lim_{x \to x_0} kf(x) = ka$

c) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)) = ab$

d) jos $b \neq 0$, niin $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Todistus. a) Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Koska (23) ja (24) pätevät, on olemassa $r_1 > 0$ siten että

$$|f(x) - a| < \frac{r}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < r_1$$

ja $r_2 > 0$ siten että

$$|g(x) - b| < \frac{s}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < r_2.$$

Valitaan

$$r = \min(r_1, r_2) > 0.$$

Olkoon $|x - x_0| < r$. Pätee

$$|f(x)+g(x)-(a+b)| \le |f(x)-a+g(x)-b| \le |f(x)-a|+|g(x)-b| < \frac{s}{2}+\frac{s}{2} = s.$$

□

Esimerkki 2.4.11 Lasketaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x}$$

kun $a > 0$ on jokin vakio.

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{a+x} = \sqrt{a}.$$

Todistus. Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Valitaan $r = \sqrt{a} \cdot s$. Oletetaan, että $|x| < r$. Silloin

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{a+x} - \sqrt{a}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{a+x} + \sqrt{a})(\sqrt{a+x} - \sqrt{a})}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}}\right| \\
&= \left|\frac{a+x-a}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}}\right| \\
&= \frac{|x|}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}} < \frac{|x|}{\sqrt{a}} < \frac{r}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\cdot s}{\sqrt{a}} = s. \quad \Box
\end{aligned}$$

Pätee

$$\frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}}.$$

Lauseesta (2.4.10) seuraa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a}} = \frac{\lim_{x\to 0} 1}{(\lim_{x\to 0} \sqrt{a+x}) + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

□

Esimerkki 2.4.12 Laske

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}},$$

missä $a, b > 0$ ovat vakioita.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{2\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}.
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.4.13 Olkoon f määritelty välillä $]y, a[$, missä $y < a$. f:llä on vasemmanpuoleinen raja-arvo b pisteessä a, jos kaikille $s > 0$ löytyy $r > 0$ siten että

$$|f(x) - b| < s, \text{ kun } a - r < x < a.$$

Merkitään

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b.$$

Sanoin: Olkoon f määritelty välillä $]a, y[$, missä $y > a$. f:llä on oikeanpuoleinen raja-arvo b pisteessä a, jos kaikille $s > 0$ löytyy $r > 0$ siten että

$$|f(x) - b| < s, \text{ kun } a < x < a + r.$$

Merkitään

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b.$$

Lause 2.4.14 Olkoon $a \in \mathbf{R}$, ja olkoon f määritelty jossain a:n punkteeratussa ympäristössä. Funktiolla f on raja-arvo b pisteessä a, jos

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b = \lim_{x\to a+} f(x).$$

Määritelmä 2.4.15 Oletetaan, että f on määritelty jollain välillä $]c, \infty[$. Sanomme, että f:llä on pisteessä ∞ raja-arvo b, jos kaikille $s > 0$ voidaan löytää $M > 0$ siten, että

$$|f(x) - b| < s,$$

aina kun x toteuttaa ehdon $x > M$ (”$f(x)$ poikkeaa b:stä vain vähän, kun x on suuri”).

Vastaavasti määritellään raja-arvo pisteessä $-\infty$. Oletetaan että f on määritelty välillä $]-\infty, c[$, $c \in \mathbf{R}$. Raja-arvo on b, jos $\forall\, s\ \exists\, M > 0$ siten, että $|f(x) - b| < s$ kun $x < -M$.

Määritelmä 2.4.16 Oletetaan, että $a \in \mathbf{R}$ ja f on määritelty jossain a:n punkteeratussa ympäristössä. Sanomme, että f:llä on raja-arvo ∞ pisteessä a, jos kaikille $M > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) > M$, kun x toteuttaa ehdon $|x - a| < r$. Vastaavasti raja-arvo on $-\infty$, jos kaikille $M > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) < -M$, kun x toteuttaa ehdon $|x - a| < r$.

Harjoitustehtävä 2.4.17 Määrittele

1. vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo ∞ tai $-\infty$ pisteessä a.
2. määrittele raja-arvo ∞ pisteessä ∞.

Esimerkki 2.4.18 Olkoon

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}.$$

Tutki f:n toispuoleisia raja-arvoja 0:ssa.

Ratkaisu. Oikeanpuoleinen: Olkoon $x > 0$. Tällöin

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = 1$$

ja

$$\lim_{x \to 0+} 1 = 1.$$

Samoin, jos $x < 0$, pätee

$$f(x) = \frac{x}{-x} = -1$$

ja

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1.$$

Siis, vasemmanpuoleinen raja-arvo on -1 ja oikeanpuoleinen raja-arvo on 1; raja-arvoa pisteessä 0 ei ole.

Esimerkki 2.4.19 Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{|x+3|}, \quad f : \mathbf{R} \setminus \{-3\} \to \mathbf{R}.$$

Väite: Pisteessä -3 raja-arvo on ∞.

Todistus. Olkoon $M > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että jos $|x - (-3)| < r$, niin $f(x) > M$. Valitaan r:ksi joku luku joka on pienempi kuin $\frac{1}{M}$, esimerkiksi $r = \frac{1}{2M}$. Jos nyt $|x + 3| < r$, niin

$$f(x) = \frac{1}{|x+3|} > \frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2M}} = 2M > M.$$

□

Esimerkki 2.4.20 Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \pi} + 2.$$

Väite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2.$$

Todistus. Olkoon $s > 0$. On löydettävä $M > 0$ siten, että $|f(x) - 2| < s$, kun $x > M$.

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{x^2 + \pi}.$$

Olkoon esim. $x > 10$. Tällöin

$$\frac{1}{x^2+\pi} < \frac{1}{10x+\pi} < \frac{1}{10x} < \frac{1}{x}.$$

Jos $M > \max(10, \frac{1}{s})$ ja $x > M$, niin

$$|f(x) - 2| < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} < \frac{1}{\frac{1}{s}} = s.$$

□

Esimerkki 2.4.21 Vastaavasti osoitetaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Esimerkki 2.4.22 Olkoot m ja n luonnollisia lukuja. Määrää

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0},$$

missä a_j, $j = 0, \ldots, m$ ja b_j, $j = 0, \ldots, n$ ovat reaalisia vakioita ja $a_m \neq 0 \neq b_n$.

Ratkaisu. a) Tapaus $n < m$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \cdots &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^m(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m})}{x^n(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n})} \\ &= \lim_{x\to\infty} x^{m-n} \frac{a_m + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} \end{aligned} \tag{25}$$

Käytetään apuna seuraavia päteviä tuloksia niitä tässä todistamatta:

- jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = a(\neq 0, \in \mathbf{R})$

  niin $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty$
- jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$

  niin $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = ab$

Kaavassa (25)

$$\lim_{x\to\infty} x^{m-n} = \infty$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n}(\in \mathbf{R}, \neq 0).$$

Tuloksen (2.4) nojalla raja-arvo on ∞.

b) Tapaus $n = m$

$$\lim_{x\to\infty} \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n}$$

c) Tapaus $n > m$

$$\lim_{x\to\infty} \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-m}} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}}$$

Tässä

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-m}} = 0,$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n} \in \mathbf{R}.$$

Tuloksen (2.4) nojalla raja-arvo on 0.

Esimerkki 2.4.23 Laske

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} 2\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} 2\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{x}} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}{(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1)} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} 2\cdot\tfrac{2}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.4.24 Olkoon $a \in \mathbf{R}^2$, ja f määrätty jossain a:n ympäristössä. Silloin f on jatkuva pisteessä a, jos

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

on olemassa ja

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Toisin sanoen, f on jatkuva pisteessä a, jos mielivaltaisella $s > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että
$$|f(x) - f(a)| < s,$$
kun $|x - a| < r$. Jos f ei ole jatkuva a:ssa, sanotaan että se on epäjatkuva.

Esimerkki 2.4.25 Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{kun } x \geq 3 \\ 1, & \text{kun } x < 3 \end{cases}.$$

Pisteessä 3:
$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} 1 = 1, \quad \lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} x^2 = 9.$$

Näin ollen f:llä ei ole raja-arvoa pisteessä 3, joten se ei ole jatkuva.

Esimerkki 2.4.26 Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{kun } x \neq 1 \\ 8, & \text{kun } x = 1 \end{cases}.$$

Tällöin pisteessä 1:
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x - 5 = -3.$$
Pätee
$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1),$$
joten f ei ole jatkuva.

Määritelmä 2.4.27 Sanomme, että f on jatkuva välillä $]a, b[$, $a < b$, jos f on jatkuva jokaisessa välin pisteessä.

Esimerkki 2.4.28 Määrätään f seuraavasti:
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \text{ rationaalinen} \\ 0, & \text{kun } x \text{ irrationaalinen} \end{cases}.$$

Tällä ei ole raja-arvoa missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$, siis f ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 2.4.29

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \text{ rationaalinen} \\ 0, & \text{kun } x \text{ irrationaalinen} \end{cases} .$$

Tällöin pätee

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad f(0) = 0.$$

Näemme että, f on jatkuva pisteessä 0. Voidaan osoittaa, että se ei ole jatkuva missään muussa pisteessä.

Heuristinen selitys: "Pomppiminen vaimenee, kun $x \to 0$".

Esimerkki 2.4.30 Näytä jatkuvuuden määritelmän perusteella, että

$$f(x) = \frac{1}{x} - 3x^2$$

on jatkuva pisteessä 2.

Ratkaisu. Olkoon $s > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että

$$\left| f(x) - \left(\frac{1}{2} - 12 \right) \right| < s, \text{ kun } |x - 2| < r.$$

1° Tutkitaan lauseketta

$$\left| f(x) + \frac{23}{2} \right| \quad \text{eli} \quad \left| \frac{1}{x} - 3x^2 + \frac{23}{2} \right|;$$

pyritään estimoimaan lausekkeella $|x-2| \cdot A(x)$, missä $|A(x)|$ rajoitettua, kun esim. $|x - 2| < 1$, eli $x \in\,]1, 3[$.

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
|\tfrac{1}{x} - 3x^2 - (\tfrac{1}{2} - 12)| &= |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2} - 3x^2 + 12| \\
(\triangle\text{-ey}) \quad &= |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2}| + | - 3x^2 + 3 \cdot 2^2)| \\
&= |\tfrac{2-x}{2x}| + |3(2^2 - x^2)| \\
&= |x - 2| \cdot \tfrac{1}{|2x|} + 3|2 - x||2 + x| \\
&= |x - 2| \cdot \left[\tfrac{1}{|2x|} + 3|2 + x| \right] \\
(x \in\,]1, 3[) \quad &\leq |x - 2| \cdot \left[\tfrac{1}{2} + 15 \right] \\
&\leq |x - 2| \cdot 30
\end{aligned}$$

2° Oletetaan $r = \frac{s}{30}$. Jos $|x - 2| < r$, niin

$$|x - 2| < \frac{s}{30} \Rightarrow \left| f(x) - \left(\frac{1}{2} - 12 \right) \right| < s \quad \square$$

Määritelmä 2.4.31 f on oikealta jatkuva pisteessä a, jos

$$f(a) = \lim_{x \to a+} f(x).$$

Samoin, f on vasemmalta jatkuva pisteessä a, jos

$$f(a) = \lim_{x \to a-} f(x).$$

Määritelmä 2.4.32 Olkoon $U \subset \mathbf{R}$ avoin osajoukko. f on jatkuva U:ssa, jos se on jatkuva jokaisessa U:n pisteessä.

Määritelmä 2.4.33 Olkoon $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ annettu. Se on jatkuva välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva kaikissa $x \in]a, b[$ ja lisäksi oikealta jatkuva a:ssa ja vasemmalta jatkuva b:ssä.

Edelleen, f on paloittain jatkuva $[a, b]$:ssä jos f on jatkuva k.o. välillä lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä, joissa sillä on vasemman ja oikeanpuoleiset äärelliset raja-arvot. Lisäksi f:n tulee olla a:ssa oikealta jatkuva, b:ssä vasemmalta jatkuva.

Esimerkki 2.4.34 Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{kun } x \leq 1 \\ x + a, & \text{kun } x > 1 \end{cases}.$$

Tehtävänä on määrätä a siten, että f on jatkuva $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} &f(1) = 2 \\ &\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x^2 + 1 = 2 \\ &\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 + a \end{aligned}$$

Valitaan $a = 1$, jolloin

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 2 = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1).$$

Tällä valinnalla f on jatkuva (koko $\mathbf{R}$:ssä).

Esimerkki 2.4.35 Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kun } x \leq a \\ 1 - x^2, & \text{kun } x > a \end{cases}.$$

Haluamme valita luvun a siten, että f on jatkuva ($\mathbf{R}$:ssä). Pätee

$$\begin{array}{l} f(a) = a - 1 \\ \lim_{x\to a-} f(x) = a - 1 \\ \lim_{x\to a+} f(x) = 1 - a^2 \end{array}.$$

Näin olen f on jatkuva kun a valitaan siten, että

$$\begin{array}{l} a - 1 = 1 - a^2 \\ \iff a^2 + 2 - 2 = 0 \\ \iff a = 1 \bigvee a = -2. \end{array}$$

Lause 2.4.36 Jos f ja g ovat jatkuvia pisteessä a (avoimessa joukossa U), niin funktiot $f+g$ ja $f \cdot g$ ovat jatkuvia a:ssa (U:ssa).

Jos lisäksi g on $\neq 0$ pisteessä a (joukossa U) niin $\frac{f}{g}$ on jatkuva pisteessä a (joukossa U).

Todistus. Lause (2.4.10). □

Seuraus 2.4.37 Polynomit ovat jatkuvia.

Lause 2.4.38 Jos f on jatkuva ja g on epäjatkuva pisteessä a, niin $f+g$ on epäjatkuva.

Todistus. Jos $f+g$ olisi jatkuva, niin

$$g = f + g - f = \underbrace{f+g}_{\text{jva}} + \underbrace{(-f)}_{\text{jva}}$$

on jatkuva, ristiriita. □

Lause 2.4.39 Jos f on jatkuva ja $\neq 0$ pisteessä a ja g on epäjatkuva, niin fg on epäjatkuva.

Todistus. Jos fg olisi jatkuva, niin myös g olisi:

$$g = \frac{g}{f} \cdot f = \frac{\overbrace{gf}^{\text{jva}}}{\underbrace{f}_{\text{jva}}}.$$

□

Esimerkki 2.4.40 Oletetaan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ 10, & x < 3 \end{cases}.$$

Molemmat ovat epäjatkuvia pisteessä $x = 3$, Mutta

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 3 \\ 10, & x < 3 \end{cases}$$

on jatkuva.

Esimerkki 2.4.41 Oletetaan

$$f(x) = (x-2)^2, \quad g(x) = \begin{cases} 32, & x > 2 \\ -32, & x < 2 \end{cases},$$

missä g on epäjatkuva. Mutta fg on jatkuva:

$$\lim_{x \to 2+} (x-2)^2 \cdot 32 = 0, \quad \lim_{x \to 2-} (x-2)^2 \cdot (-32) = 0.$$

Lause 2.4.42 Oletetaan että f ja g ovat jatkuvia pisteessä a. Silloin

$$x \mapsto |f(x)| \quad \text{ja} \quad x \mapsto \max(f(x), g(x))$$

ovat jatkuvia.

Todistus. Olkoon $s > 0$ annettu, f jatkuva a:ssa. Voidaan löytää $r > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \frac{s}{2}, \text{ kun } |x-2| < r.$$

Osoitetaan, että

$$\Big| |f(x)| - |f(a| \Big| < s.$$

Mutta nyt pätee

$$\Big| |f(x)| - |f(a| \Big| \overbrace{\leq}^{\triangle\text{-ey}} |f(x) - f(a)| < \frac{s}{2} < s, \text{ kun } |x-a| < r.$$

Samoin

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(|f-g| + f + g)$$

on jatkuva. $\square$

2.5 Trigonometriset funktiot

Funktiot $\sin \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $\cos \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ voitaisiin määritellä sarjoilla

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Koska emme vielä ole perehtyneet sarjateoriaan, asiaan palataan Analyysi III:ssa.

Edellä mainituista kaavoista voidaan johtaa seuraavat perusominaisuudet:

1° $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

2° $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3° Yhteenlaskukaavat:

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4° $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Geometrinen tulkinta

Voidaan osoittaa:

$\sin \theta =$ kehäpisteen y-koordinaatti

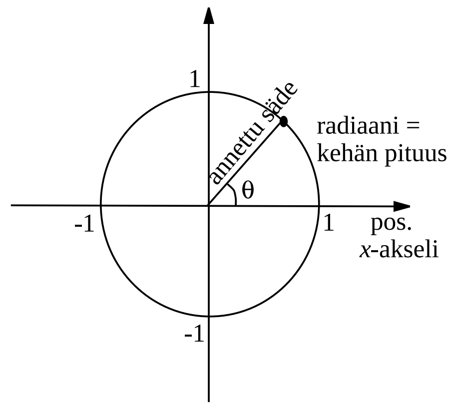
$\cos \theta =$ kehäpisteen x-koordinaatti

kun $\theta \in [0, 2\pi]$ on kulma radiaaneissa (katso kuvat (4) ja (5)).

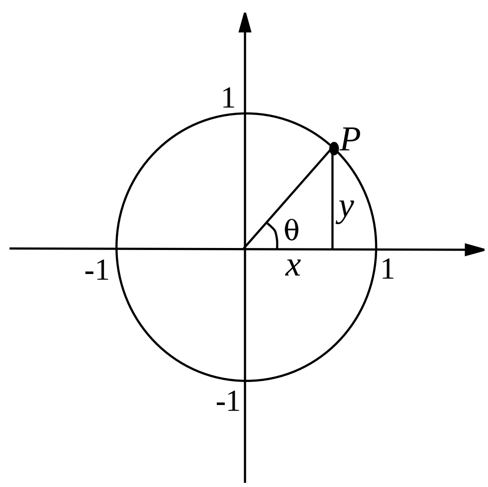
Toinen geometrinen tulkinta: Suorakulmaisessa kolmiossa (katso uva (6))

$$\sin \theta = \frac{b}{a}$$

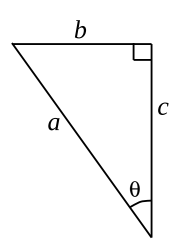
$$\cos \theta = \frac{c}{a}$$



Kuva 4: Geometrinen tulkinta ympyrässä



Kuva 5: Geometrinen tulkinta ympyrässä



Kuva 6: Geometrinen tulkinta kolmiossa

Lause 2.5.1 Funktiot sin ja cos ovat 2π-jaksollisia, eli

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x.$$

Lisäksi

- $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbf{R}$
- $\sin 0 = 0 = \sin\pi$,

  $0 < \sin x$, kun $0 < x < \pi$

  $0 > \sin x$, kun $\pi < x < 2\pi$
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \cos\frac{3\pi}{2}$,

  $\cos x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

  $\cos x < 0$, kun $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Nämä voidaan johtaa edellellä mainituista sarjaesityksistä.

Määritelmä 2.5.2 Määritellään seuraavat trigonomiset funktiot:

Tangentti: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Kotangentti: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Sekantti: $\sec x = \frac{1}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Kosekantti: $\csc x = \frac{1}{\sin x}, x \neq n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$.

Suorakulmaisessa kolmiossa pätee

$$\tan\theta = \frac{b}{c}$$

$$\cot\theta = \frac{c}{b}$$

Trigonometristen funktioiden ominaisuuksia

Lause 2.5.3 Funktio sin on pariton, cos parillinen:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \quad \forall\ x \in \mathbf{R}.$$

Todistus. Yhteenlaskukaavoista seuraa

$$\sin 0 = \sin(x + (-x)) = \sin x \cos(-x) + \cos x \sin(-x) \tag{26}$$

$$\cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x). \tag{27}$$

Kerrotaan yhtälö (26) $\sin x \cos x$:llä:

$$0 = \sin^2 x \cos(-x) \cos x + \cos^2 x \sin x \sin(-x). \tag{28}$$

Kaavasta (27) seuraa

$$\cos x \cos(-x) = 1 + \sin x \sin(-x). \tag{29}$$

Sijoitetaan tämä (28):een, saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \sin^2 x(1 + \sin x \sin(-x)) + \cos^2 x \sin x \sin(-x) \\ &= \sin^2 x(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1})(\sin x \sin(-x)) \\ &= \sin^2 x + \sin x \sin(-x) \end{aligned}.$$

Jaetaan $\sin x$:llä (kun $x \neq n\pi$), saadaan

$$0 = \sin x + \sin(-x) \iff \sin(-x) = -\sin x \quad \square$$

Kaava $\cos x = \cos(-x)$ seuraa (26):stä sijoittamalla saatu $\sin(-x) = -\sin x$ ja jakamalla $\sin x$:llä.

Poikkeusarvot $x = n\pi$ jne. hoidetaan "käsityönä". $\square$

Seuraus 2.5.4 Funktiot tan, cot ja csc ovat parittomia ja sec parillinen.

Lause 2.5.5 Jos $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, niin

$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

Jos $x \neq n\pi$, niin

$$\cot(x + \pi) = \cot x.$$

Todistus.

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+pi)} = \frac{\sin x\cos\pi + \cos x\overbrace{\sin\pi}^{=0}}{\cos x\cos\pi - \sin x\underbrace{\sin\pi}_{=0}} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos\pi}{\cos\pi} = \tan x,$$

$$\cot(x+\pi) = \frac{1}{\tan(x+\pi)} = \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

□

Huomaa myös, että $\sin x = \cos x$, kun $x = \frac{\pi}{4}$. Kaavasta (27) saadaan siten

$$\begin{aligned}&(\sin\tfrac{\pi}{4})^2 + (\cos\tfrac{\pi}{4})^2 = 1 = (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 + (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 = 2(\sin\tfrac{\pi}{4})^2\\ &\Longrightarrow (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Näin ollen:

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \tan\tfrac{\pi}{4} &= 1 = \cot\tfrac{\pi}{4},\\ \csc\tfrac{\pi}{4} &= \sec\tfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Muita kaavoja trigonometrisille funktioille

- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$, kun $x \neq n\pi$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Todistus. Yhteenlaskukaavoilla. □

Lause 2.5.6 Funktiot sin ja cos ovat jatkuvia.

Todistus. Sini: Kaavat

$$\sin 0 = 0 \tag{30}$$

ja

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{31}$$

pätevät. Olkoon $s > 0$. Tällöin (31):sta seuraa, että

$$\exists\ r > 0 \text{ siten, että } |\frac{\sin x}{x} - 1| < s, \text{ kun } |x| < r.$$

Nyt

$$|\sin x| = |\sin x - x + x| \leq |\sin x - x| + |x| = |x|\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| + |x|. \qquad (32)$$

Yllä nähtiin, että on olemassa $r' > 0$ siten, että

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leq 1, \text{ kun } |x| < r'.$$

Jos $|x| < r'$, yhtälöstä (32) seuraa

$$|\sin x| \leq 2|x|.$$

Tästä seuraa

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Yhtälön (30) ja jatkuvuuden määritelmän nojalla sini on siten jatkuva 0:ssa.

Edelleen,

$$0 \leq 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq 2x^2, \text{ kun } |x| < r'$$

Siis,

$$0 \leq 1 - \cos x \leq 2x^2 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0 \quad \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$

Ja cos on jatkuva pisteessä 0.

Olkoon $y \in \mathbf{R}$. Yhteenlaskukaavasta saadaan

$$\begin{aligned}
\sin(y + x) &= \sin y \cos x + \cos y \sin x \\
\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin(y + x) &= \lim_{x\to 0}(\sin y \cos x + \cos y \sin x) \\
&= \sin y(\underbrace{\lim_{x\to 0} \cos x}_{=1}) + \cos y(\underbrace{\lim_{x\to 0} \sin x}_{=0}) \\
&= \sin y.
\end{aligned}$$

Siis, sinin raja-arvo pisteessä y 0n $\sin y$. Siksi sini on jatkuva pisteessä y. Vastaavasti todetaan kosinin jatkuvuus. □

Esimerkki 2.5.7 Laske

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \qquad (33)$$

Ratkaisu. Pätee

$$\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$$

kaikilla $y \in \mathbf{R}$. Sijoitetaan $y = \frac{x}{2}$, saadaan (33)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2)\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

koska

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

Esimerkki 2.5.8

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x\cdot\frac{x}{\sin x} = (\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2})(\lim_{x\to 0} x)(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}) = 0$$

Esimerkki 2.5.9

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2$$

Esimerkki 2.5.10 Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Laske

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\tan x - \sin x}.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\tan x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\sin x}\frac{\cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\frac{x^2}{1-\cos x}(\cos x)x^{k-3}\\
&= (\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x})(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x})(\lim_{x\to 0}\cos x)(\lim_{x\to 0}x^{k-3})\\
&= 1\cdot 2\cdot 1\cdot \lim_{x\to 0}x^{k-3} = \begin{cases} 0, & k>3\\ 2, & k=3\\ \nexists, & k=2\\ +\infty, & k=1\end{cases}
\end{aligned}$$

Trigonometrisiä funktioita sisältävistä yhtälöistä

Ratkaisemisessa käyteään trigonometristen funktioiden periodisuutta, yhteenlaskukaavoja ja kekseliäisyyttä.

Esimerkki 2.5.11 Olkoot P ja Q polynomeja. Ratkaise yhtälö

$$\sin(P(x)) = \sin(Q(x)).$$

Ratkaisu.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(x) & = & Q(x) + 2\pi \cdot k, \text{ jollekin } k \in \mathbf{Z} \\ \text{tai} & & \\ P(x) & = & (\pi - Q(x)) + 2\pi \cdot k, \text{ jollekin } k \in \mathbf{Z} \end{array} \right. .$$

Yhtälö palautuu siten polynomin 0-kohtien etsimiseen.

Esimerkiksi

$$P(x) = x^2 + 1, \quad Q(x) = 5x + \pi$$

jolloin yhtälö on

$$\sin(x^2 + 1) = \sin(5x + \pi).$$

Sillä on seuraavat ratkaisut:

i)

$$\begin{array}{rl} & x^2 + 1 = 5x + \pi + 2\pi \cdot k \\ \iff & x^2 - 5x + 1 - \pi - 2\pi \cdot k = 0 \\ \iff & x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1 - \pi - 2\pi k)}}{2}. \end{array}$$

Tässä oltava $x \in \mathbf{R}$, mikä pätee kun kokonaisluku k toteuttaa

$$25 - 4(1 - \pi - 2\pi k) \geq 0 \quad \text{eli} \quad k \geq \frac{-21 - 4\pi}{8\pi},$$

ii)

$$x^2 + 1 = 5x + \pi + \pi - x + 2\pi \cdot k \iff x^2 - 4x + 1 - 2\pi(k+1) = 0$$

Tämä ratkaistaan samaan tapaan.

Huomautus 2.5.12 Jos f, g ovat mitä tahansa reaalimuuttujan funktioita, yhtälö

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x))$$

palautuu yhtälöihin

$$f(x) = g(x) + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{ja} \quad f(x) = \pi - g(x) + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Esimerkki 2.5.13 Olkoot f, g annettuja funktioita $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Yhtälö

$$\cos(f(x)) = \cos(g(x))$$

toteutuu jos ja vain jos

$$f(x) = g(x) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{tai} \quad f(x) = -g(x) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Samoin

$$\begin{aligned} &\tan(f(x)) = \tan(g(x)) \\ \iff &\begin{cases} f(x) = g(x) + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \\ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \neq g(x) \quad \forall\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Samoin

$$\cot(f(x)) = \cot(g(x)).$$

(Harjoitustehtävä.)

Esimerkki 2.5.14 Olkoon $P(x)$ ja $Q(x)$ polynomeja. Ratkaise yhtälö

$$\tan P(x) = \cot Q(x).$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} \tan P(x) = \cot Q(x) \quad &\iff \quad \tfrac{\sin P(x)}{\cos P(x)} = \tfrac{\cos Q(x)}{\sin Q(x)} \\ &\iff \quad \sin P(x) \sin Q(x) = \cos Q(x) \cos P(x) \\ &\iff \quad \sin P(x) \sin Q(x) - \cos Q(x) \cos P(x) = 0 \\ &\iff \quad \cos(P(x) + Q(x)) = 0 \\ &\iff \quad P(x) + Q(x) = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ jollekin } k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Tässä x oltava sellainen, että $\tan P(x)$ ja $\cot Q(x)$ ovat määriteltyjä.

Esimerkki 2.5.15 Ratkaise

$$\cos x \cdot \cos(x+1) = 1. \tag{34}$$

Koska $|\cos x| \leq 1$, (34) toteutuu jos

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \cos x &= 1 \\ \cos(x+1) &= 1 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \cos x &= -1 \\ \cos(x+1) &= -1 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} x &= 2\pi \cdot k, k \in \mathbf{Z} \\ x+1 &= 2\pi \cdot n, n \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x &= \pi + 2\pi \cdot k, k \in \mathbf{Z} \\ x+1 &= \pi + 2\pi \cdot n, n \in \mathbf{Z} \end{cases} \\ \iff &\ 1 = 2\pi(n-k), n, k \in \mathbf{Z} \quad \text{tai} \quad 1 = 2\pi(n-k)n, k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Yhtälö $1 = 2\pi(n-k)$ ei toteudu millään n, k

$$\underbrace{\pi}_{\in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \underbrace{\frac{1}{2(n-k)}}_{\in \mathbf{Q}}$$

Esimerkki 2.5.16

$$\underbrace{\sin x + \cos(2\pi + x)\cos(x+1)}_{\leq 2} = 3$$

Ei ratkaisua.

2.6 Funktioiden yhdistäminen

Esimerkki 2.6.1 Tarkastellaan funktioita

$$f : x \mapsto \sin^2 x.$$

Funktion f voidaan yhdistää funktioista

$$x \mapsto \sin x \text{ ja } y \mapsto y^2.$$

Vastaavasti $x \mapsto 2^{\sin \sqrt{x}}$ on yhdistetty funktioista

$$x \mapsto \sqrt{x}, y \mapsto \sin y \text{ ja } z \mapsto 2^z.$$

Määritelmä 2.6.2 Olkoon $A, B, C, \subset \mathbf{R}$, ja $f : A \to B, g : B \to C$. Määritellään yhdistetty kuvaus

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Funktioiden yhdistäminen on liitännäistä: Olkoot $A, B, C, D \subset \mathbf{R}$, $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$. Silloin pätee

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Näin ollen voidaan merkitä

$$h \circ g \circ f := (h \circ g) \circ f.$$

Harjoitustehtävä 2.6.3 Olkoon $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{|x| + 1}$. Laske $f \circ (h + k)$ ja $(g + 2k) \circ f$.

Lause 2.6.4 Oletetaan että $f : A \to B$ on jatkuva pisteessä $a \in A$ ja $g : B \to C$ on jatkuva pisteessä $b := f(a) \in B$. Tällöin $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a.

Todistus. Olkoon $s > 0$. Halutaan löytää luku $r > 0$ siten, että

$$|g \circ f(x) - g \circ f(a)| < s, \text{ kun } |x - a| < r.$$

Koska g on jatkuva b:ssä, on olemassa $r' > 0$, jolle

$$|g(x) - g(b)| < s, \text{ kun } |x - b| < r'. \tag{35}$$

Koska f on jatkuva a:ssa, on olemassa $r > 0$, jolle

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - b| < r', \text{kun } |x - a| < r. \tag{36}$$

Yhteenveto: jos $|x - a| < r$, niin $|f(x) - b| < r'$. Silloin (35):sta seuraa

$$|g(f(x)) - g(b)| < s \text{ eli } |g \circ f(x) - g \circ f(a)| < s.$$

□

Iteraatioteoriaa

Olkoon $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to A$. Merkitään

$$f^n(x) := (f \circ f \circ \ldots \circ f)(x) = f(f(f(\ldots f(x) \ldots)))$$

f:n n:s iteraatti.

Huomaa, että

$$f(x)^n = f(x)f(x) \ldots f(x) \neq f^n(x) \quad .$$

Valitettavasti trigonometrisille funktioille $\sin^2 x = (\sin x)^2$, mikä ei ole sopusoinnussa edellä mainitun yleisen merkinnän kanssa.

Esimerkki 2.6.5 $A = \mathbf{R}$ ja $f(x) = x^3 + 1$.

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (x^3+1)^3 + 1 \text{ on 9. asteen polynomi} \\ f(x)^2 &= (x^3+1)^2 \text{ on 6. asteen polynomi.} \end{aligned}$$

Samoin, jos

$$g(x) = \frac{1}{x^2+2},$$

niin

$$g^2(x) = \frac{1}{(\frac{1}{x^2+2})^2 + 2} = \frac{1}{\frac{1}{x^4+4x^2+4} + 2} = \frac{x^4+4x^2+4}{9+2x^4+8x^2}.$$

Tarkastellaan yhtälöä

$$x = f(x), \tag{37}$$

missä $x \in \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Jos tiedetään, että on olemassa suljettu väli

$$B \subset \mathbf{R} \quad (B = [a, b]\,, |a|, |b| < \infty)$$

siten, että $f(B) \subset B$ (eli $f(x) \in B \forall x \in B$) ja on olemassa $0 < c < 1$ siten, että

$$|f'(x)| < c \quad \forall x \in B$$

niin luku

$$y = \lim_{n \to \infty} f^n(x_0) \tag{38}$$

(missä $x_0 \in B$ voidaan valita mielivaltaisesti) on yhtälön (37) ratkaisu. Ratkaisu (38) on yksikäsitteinen välillä B.

Tämä tulos on erikoistapaus Boanachin kiintopistelauseesta.

Esimerkki 2.6.6 Yhtälö

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x + x = 0$$

voidaan kirjoittaa muodossa $x = -\frac{1}{2}\cos x$. Siis,

$$f(x) = -\frac{1}{2}\cos x.$$

Otetaan $B = [-1, 1] \Rightarrow f(B) \subset B$ ja

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B.$$

Yhtälölle on siis yksikäsitteinen ratkaisu välillä $[-1, 1]$.

Esimerkki 2.6.7 Yhtälön

$$x^8 + \sin x - 4x = 0$$

ratkaisu on $x = \frac{1}{4}(x^8 + \sin x)$.

$$f'(x) = 2x^7 + \frac{1}{4}\cos x.$$

Valitaan $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Jos $x \in B$, niin

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq 2 \cdot \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2} \\ |f(x)| &\leq \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^8 + \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2}, \text{ josta } f(x) \in B. \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa ratkaisu on $x = 0$. Muita ratkaisuja ei ole välillä $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

2.7 Käänteisfunktio

Lause 2.7.1 (Bolzanon lause). Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Funktio f saa jokaisen arvon joka on arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välillä. Erityisesti jos $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, niin on olemassa $y \in [a, b]$ jolle $f(y) = 0$.

Tulosta voidaan käyttää yhtälöjen likimääräiseen ratkaisemiseen.

Esimerkki 2.7.2 Yhtälö

$$P(x) = 0, \tag{39}$$

missä

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1,$$

pätee

$$P(0) = -1, \quad P(1) = 1.$$

Siis (39):llä on ratkaisu välillä $]0,1[$. Edelleen

$$\begin{array}{rcl} P(\frac{1}{2}) & = & \frac{17}{16} \quad \Rightarrow \quad \text{ratkaisu } \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ P(\frac{1}{4}) & = & \frac{49}{256} \quad \Rightarrow \quad \text{ratkaisu } \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\\ P(\frac{1}{8}) & = & -\frac{1567}{1098} \quad \Rightarrow \quad \text{ratkaisu } \in \left]\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right[\\ & \text{jne..} & \end{array}$$

Määritelmä 2.7.3 Olkoon $A, B \subset \mathbf{R}$ ja $f : A \to B$ bijektio. Silloin vastaa jokaista $y \in B$ täsmälleen yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Näin tulee määritellyksi funktio $g : B \to A$, f:n käänteisfunktio. Se toteuttaa:

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(x) & = & x \quad \forall x \in A \\ f \circ g(x) & = & x \quad \forall x \in B. \end{array}$$

Yleensä merkitään $g =: f^{-1}$.

Esimerkki 2.7.4 Olkoon $f(x) = 2x+1$. Tämä on bijektio $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Käänteisfunktion lauseke löydetään ratkaisemalla yhtälöstä

$$2x + 1 = y \tag{40}$$

x luvun y:n funktiona:

$$(40) \iff 2x = y - 1 \iff x = \frac{y-1}{2}.$$

Siis $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

Lause 2.7.5 Oletetaan, että funktio f toteuttaa:

1° f on jatkuva välillä $\triangle$, missä $\triangle$ on jokin seuraavista: $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b]$, $[a,b[$, $]-\infty,a[$, $]-\infty,a]$, $[a,\infty[$, $]a,\infty[$.

2° f on aidosti kasvava, eli $f(x) > f(y)$, kun $x > y$, $x, y \in \triangle$.

Silloin joukko $\triangle' := f(\triangle) := \{y \mid y = f(x) \text{ jollekin } x \in \triangle\}$ on jotain edellä mainittua tyyppiä, f:llä on käänteiskuvaus $f^{-1} : \triangle' \to \triangle$, ja f^{-1} on jatkuva ja aidosti kasvava.

Huomautus 2.7.6 Jos f on aidosti vähenevä ($f(x) < f(y)$ kun $x > y$), niin sama pätee, mutta f^{-1} on aidosti vähenevä.

Huomautus 2.7.7 Jos $f(x) = x^2$, $\triangle =]0, \infty[$ niin f on aidosti kasvava. $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{x^2}$ vaan $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Tarkastellaan potenssifunktiota $f(x) = x^n$, missä $n \in \mathbf{N}$. Kun $n = 1$, käänteisfunktiolle pätee $f^{-1}(x) = x = f(x)$.

Olkoon $n \geq 2$. Tarkastellaan tapausta $\triangle = [0, \infty[$. Potenssiinkorotuksen laskusäännöistä seuraa, että $x^n > y^n$ Jos $x > y \geq 0$.

Lauseesta (2.7.5) seuraa, että f:llä on olemassa käänteisfunktio, jota merkitään $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Koska

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty,$$

pätee $f(\triangle) = [0, \infty[=: \triangle'$ ja $\sqrt[n]{x}$ on siten määritelty $\forall x \in [0, \infty[$.

Jos lisäksi n on pariton, silloin f on aidosti kasvava myös joukossa $]-\infty, 0]$. Lisäksi

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty.$$

Jos nyt merkitään $\triangle =]-\infty, \infty[= \mathbf{R}$, niin $\triangle' := f(\triangle) = \mathbf{R}$. Merkitään edelleen käänteisfunktiota $\sqrt[n]{x}$; kun n on pariton tämä on siis määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

3 Derivaatta

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$. Sen kuvaaja kulkee pisteiden $(1, 1)$ ja $(1 + h, (1 + h)^3)$ kautta. Niiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{(1 + h) - 1} = \frac{(1 + h)^3 - 1}{h}.$$

Tätä lauseketta sanotaan myös f:n erotusosamääräksi pisteessä 1.

Tutkimme lausekkeen raja-arvoa, kun h lähestyy nollaa. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3h+3h^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(3+3h+h^2) = 3.
\end{aligned}$$

Luku 3 on tangentin kulmakerroin pisteessä 1.

Määritelmä 3.0.8 Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja f funktio joka on määritelty x:n jossakin ympäristössä. Jos lausekkeella

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on raja-arvo, kun h lähestyy nollaa, tätä raja-arvoa sanotaan f:n derivaataksi pisteessä x.

Merkitään

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Sanotaan myös että tällöin f on derivoituva pisteessä x.

Jos f on derivoituva välin Δ jokaisessa pisteessä, vastaa jokaista $x \in \Delta$ luku $f'(x)$. Näin määritelty kuvaus $f' : \Delta \to \mathbf{R}$ on f:n derivaatta.

Esimerkki 3.0.9 Laske funktion $f(x) = x^4$ derivaatta.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3) = 4x^3
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.0.10 Onko funktio

$$f(x) = |x-1| + \pi$$

derivoituva?

Ratkaisu. Oletetaan että $x < 1$. Tällöin

$$f(x) = 1 - x + \pi$$

ja

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1 - (x+h) + \pi - (1 - x + \pi)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1, \end{aligned}$$

joten f on derivoituva kun $x < 1$.

Oletetaan että $x > 1$. Tällöin

$$f(x) = x - 1 + \pi$$

ja

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1,$$

joten f on derivoituva kun $x > 1$.

Tapaus $x = 1$. Erotusosamäärä pisteessä 1 on

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{|1 + h - 1| + \pi - \pi}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Tämän vasemmanpuoleinen raja-arvo on -1 ja oikeanpuoleinen raja-arvo on 1. Raja-arvoa ei siis ole olemassa, joten f ei ole derivoituva pisteessä 1.

Lause 3.0.11 Funktiolla f on pisteessä x derivaatta a, jos f:n lisäys voidaan kirjoittaa seuraavasti: Kun h kuuluu johonkin nollan ympäristöön, pätee

$$f(x+h) - f(x) = ah + hg(h), \tag{41}$$

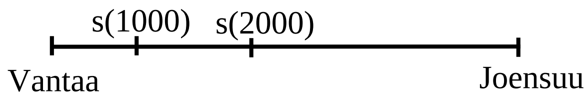
missä a on vakio ja g on funktio joka on määritelty 0:n jossain ympäristössä, g on jatkuva 0:ssa ja $g(0) = 0$.

Todistus. a) Oletetaan että $f'(x) = a$. Määritellään

$$g(h) = \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a, & \text{jos } h \neq 0 \\ 0, & \text{jos } h = 0. \end{cases}$$

Koska f on derivoituva, pätee

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \Rightarrow \lim_{h\to 0} g(h) = 0$$



Kuva 7: Auton sijainti

Tästä seuraa, että g on jatkuva 0:ssa (g:n raja-arvo 0:ssa on sama kuin g:n arvo 0:ssa.)

Näin ollen g toteuttaa vaaditut ehdot. Edelleen, kehitelmä (41) toteutuu g:n määritelmän perusteella.

b) Oletetaan että (41) pätee. Tällöin

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a + g(h).$$

Siis,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(a+g(h)) = a + \lim_{h\to 0} g(h).$$

Näin ollen f:n derivaatta pisteessä x on a. $\square$

Termiä a sanotaan f:n differentiaaliksi pisteessä x, merkitään df.

Esimerkki 3.0.12 Olkoon $s(t)$ auton sijainti (metreissä) hetkellä t (sekunteja, katso kuva 7).

Tällöin s on reaalimuuttujan t funktio, esimerkiksi $s(t) = 30t$. Auton keskinopeus on määritelmän mukaan ajettu matka jaettuna siihen käytetyllä ajalla. Keskinopeus esimerkiksi aikana $t \in [1000, 2000]$ on siten

$$\frac{s(2000)-s(1000)}{2000-1000} = 30 \text{ (metriä sekunnissa)}.$$

Jos $h > 0$, keskinopeus aikana $t \in [1000, 1000+h]$ on

$$\frac{s(1000+h)-s(1000)}{1000+h-1000} = \frac{30(1000+h)-30\cdot 1000)}{h} = 30.$$

Hetkellinen nopeus, "nopeusmittarin näyttö", hetkellä $t = 1000$ on

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(1000+h)-s(1000)}{1000+h-1000} = \lim_{h\to 0} \frac{s(1000+h)-s(1000)}{h} = s'(1000) = 30.$$

Otetaan toinen esimerkki. Oletetaan, että auton sijainti hetkellä t saadaan funktiosta

$$s(t) = \begin{cases} 30t + \sin \pi t, & t < 7000 \\ 30 \cdot 7000, & 7000 < t < 8000 \\ 25t + \sin \pi t, & t > 8000. \end{cases}$$

Nyt keskinopeus aikana $t \in [1000, 2000]$ on

$$\frac{s(2000) - s(1000)}{1000} = \frac{60000 + \sin \pi 2000 + (30000 + \sin \pi 1000)}{1000} = 30$$

ja aikana $t \in [1000, 1000 + h]$

$$\frac{s(1000 + h) - s(1000)}{h}.$$

Hetkellinen nopeus hetkellä $t = 1000$ on nyt

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(1000 + h) - s(1000)}{h} = s'(1000) = 30 + \pi \cos 1000\pi = 30 + \pi \cong 33, 1.$$

Lause 3.0.13 Jos funktiolla f on derivaatta pisteessä x, niin f on jatkuva pisteessä x.

Lause 3.0.14 Vakiofunktion derivaatta on 0 kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Funktion

$$x \mapsto x^n, \quad n \in \mathbf{N}$$

derivaatta on nx^{n-1}.

Todistus. Todistetaan induktiolla.

1° $n = 1$. Olkoon $x, h \in \mathbf{R}$,

$$(x + h) - x = h.$$

Lauseessa (3.0.11) otetaan $a = 1$ ja $g(h) = 0$, joten derivaatta on vakio 1. (Voidaan helposti todistaa myös erotusosamäärän raja-arvon avulla.)

2° Oletetaan, että väite on todistettu funktiolle x^n, siis

$$Dx^n = nx^{n-1}. \tag{42}$$

On osoitettava, että väite pätee myös funktiolle x^{n+1}. Kohdasta (42) seuraa että on olemassa g joka toteuttaa lauseen (3.0.11) oletukset siten, että

$$(x + h)^n - x^n = \underbrace{nx^{n-1}}_{a} h + hg(h).$$

Kirjoitetaan

$$
\begin{aligned}
(x+h)^{n+1} - x^{n+1} &= (x+h)(x+h)^n - x^{n+1} \\
&= (x+h)(nx^{n-1}h + x^n + hg(h)) - x^{n+1} \\
&= (n+1)x^n h + h((x+h)g(h) + nx^{n-1}h) \\
&= (n+1)x^n h + h\widetilde{g}(h),
\end{aligned}
$$

missä on merkitty $\widetilde{g}(h) = (x+h)g(h) + nx^{n-1}h$. Tässä

$$\lim_{h \to 0} \widetilde{g}(h) = 0,$$

yllä olevasta kaavasta nähdään, että derivaatta on $(n+1)x^n$. Joten $\widetilde{g}$ toteuttaa lauseen (3.0.11) vaatimukset. $\square$

Lause 3.0.15 Jos f:llä on derivaatta $f'(x)$ pisteessä x ja $C \in \mathbf{R}$, niin funktiolla Cf on derivaatta $Cf'(x)$ pisteessä x. Samoin, jos g:llä on derivaatta $g'(x)$, niin

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Tästä ilmiöstä käytetään nimitystä, että derivaatta on lineaarinen operaattori ja derivointi on lineaarinen laskutoimitus.

Lause 3.0.16 Olkoon f ja g kuten lauseessa (3.0.15). Tällöin funktiolla fg on derivaatta

$$f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

pisteessä x. Jos lisäksi $g(x) \neq 0$, niin

$$
\begin{aligned}
D\frac{1}{g(x)} &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{ja} \\
D\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}
$$

Todistetaan tässä vain tulon derivointikaava. Olkoon $h \in \mathbf{R}$ riittävän pieni. Merkitään

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= f(x+h) - f(x) \\
\Delta g &= g(x+h) - g(x).
\end{aligned}
$$

Kirjoitetaan tulofunktion fg erotusosamäärä

$$
\begin{aligned}
& \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
= & \frac{(\Delta f+f(x))(\Delta g+g(x))-f(x)g(x)}{h} \\
= & \frac{\Delta f\Delta g+\Delta f\cdot g(x)+f(x)\Delta g+f(x)g(x)-f(x)g(x)}{h} \\
= & \frac{\Delta f}{h}\cdot\Delta g+\frac{\Delta f}{h}\cdot g(x)+f(x)\frac{\Delta g}{h} \\
\longrightarrow & \ 0+f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

kun $h\to 0$.

Derivaatalle on käytössä monia eri merkintöjä, esimerkiksi

$$
f'(x)=Df(x)=(Df)(x)=(Df(z))_{z=x}=\frac{df}{d}=\frac{df(x)}{dx}.
$$

3.1 Trigonometristen funktioiden derivaatat

Lause 3.1.1 Koko $\mathbf{R}$:ssä pätee

$$
\begin{aligned}
D\sin x &= \cos x \\
D\cos x &= -\sin x.
\end{aligned}
$$

Todistus. Muodostetaan erotusosamäärä

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h} \\
&= \frac{\sin h}{h}\cos x+\sin x\frac{\cos h-1}{h} \\
&\longrightarrow 1\cdot\cos x+\sin x\cdot 0=\cos x
\end{aligned}
$$

kun $h\to 0$. Samoin

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \\
&= \cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h} \\
&\longrightarrow -\sin x
\end{aligned}
$$

kun $h\to 0$. $\square$

Näistä seuraa soveltamalla lausetta (3.0.16).

$$
\begin{aligned}
D\tan x &= 1+\tan^2 x \\
D\cot x &= -(1+\cot^2 x)
\end{aligned}
$$

Lause 3.1.2 Olkoon f määritelty pisteen x eräässä ympäristössä $B(x,h)$ $(h>0)$ ja oletetaan, että f on derivoituva pisteessä x. Olkoon g määritelty pisteen $y := f(x)$ ympäristössä $B(y,s)$ $(s>0)$ ja oletetaan että g on derivoituva pisteessä y. Silloin yhdistetty funktio $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x ja

$$D(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Todistuksen idea:

- Käytetään lausetta (3.0.11) g:lle.
- Muodostetaan erotusosamäärä $g \circ f$ ja käytetään yhtälöä (41).

Esimerkki 3.1.3 Derivoi funktio $\sin(x^2)$. Tämä on yhdistetty funktioista

$$g : x \mapsto \sin x, \quad \text{ja} \quad f : x \mapsto x^2.$$

Siis,

$$\sin(x^2) = g \circ f(x).$$

Lauseen (3.1.2) mukaan pätee

$$D\sin(x^2) = g'(g(x)) \cdot f'(x) = \cos(f(x)) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2).$$

Esimerkki 3.1.4 Derivoi

$$e^{x^3 - \cos x} =: \exp(x^3 - \cos x).$$

Tämä on yhdistetty funktioista

$$g : x \mapsto \exp(x) \quad \text{ja} \quad f : x \mapsto x^3 - \cos x,$$

eli $\exp(x^3 - \cos x) = g \circ f(x)$. Siis

$$\begin{aligned} D\exp(x^3 - \cos x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \exp(f(x)) \cdot (3x^2 + \sin x) \\ &= (3x^2 + \sin x)e^{x^3 - \cos x}. \end{aligned}$$

Huomautus 3.1.5 Oletetaan että on annettu funktiot $f_1, \ldots, f_n$. Oletetaan että

f_1 on määritelty pisteen x ympäristössä ja derivoituva pisteessä x.

f_2 on määritelty pisteen $f_1(x)$ ympäristössä ja derivoituva siinä, jne...

Silloin n:n yhdistetyn funktion derivointikaava on

$$\begin{aligned} & D\Big(f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1\Big)(x) \\ = \; & f_n'\Big(f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1(x)\Big) \cdot f_{n-1}'\Big(f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1(x)\Big) \ldots f_2'\Big(f_1(x)\Big) f_1'(x) \end{aligned}$$

Käytännössä tapaus $n = 2$ eli lause (3.1.2) riittää. Esimerkkinä tarkastellaan funktioita f, g, h ja yhdistettyä funktiota $h \circ g \circ f$ pisteessä x. Tällöin

$$D\Big(h \circ g \circ f\Big)(x) = D\Big(h \circ G\Big)(x),$$

missä $G(x) := g \circ f(x)$. Soveltamalla lausetta (3.1.2) kaksi kertaa saadaan derivaataksi

$$h'(G(x)) \cdot G'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Esimerkki 3.1.6 Derivoi

$$\cos(e^{x+\sin x}) = \cos(\exp(x + \sin x)).$$

Määritellään

$$\begin{aligned} h(x) &= \cos(x) \\ g(x) &= \exp(x) \\ f(x) &= x + \sin(x). \end{aligned}$$

Silloin

$$\cos(e^{x+\sin x}) = h \circ g \circ f(x).$$

Derivaatta on

$$-\sin(\exp(x+\sin x)) \cdot \exp(x+\sin x) \cdot (1+\cos x) = (1+\cos x)e^{x+\sin x} \cdot (-\sin(e^{x+\sin x})).$$

Esimerkki 3.1.7 Katso kuva (8).

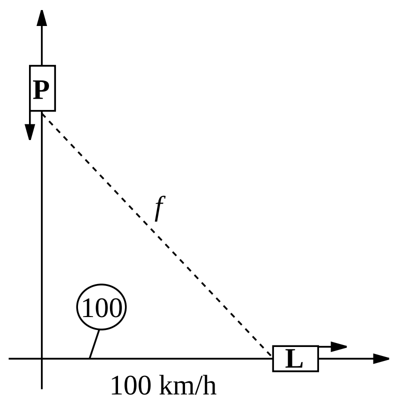
$W(t) =$ auton P sijainti hetkellä t

$W(t_0) = 1\text{km}$, $\frac{dW}{dt}(t_0) = -80$ km/h

$Z(t) =$ auton L sijainti hetkellä t

$Z(t_0) = 1,5\text{km}$

$f(t) =$ autojen P ja L välinen etäisyys hetkellä t.



Kuva 8: Autot P ja L

Oletetaan että

$$\frac{df}{dt}(t_0) = 60\text{km/h}.$$

Mitä on

$$\frac{dZ}{dt}(t_0)?$$

Ratkaisu. Pythagoraan lauseen mukaan

$$f(t)^2 = W(t)^2 + Z(t)^2 \Rightarrow f(t) = \sqrt{W(t)^2 + Z(t)^2}.$$

Derivoidaan reaalimuuttujan t suhteen:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{(W(t)^2+Z(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \tfrac{d}{dt}(W(t)^2 + Z(t)^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{W(t)^2+Z(t)^2}} \cdot (2W(t)W'(t) + 2Z(t)Z'(t)) \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{W(t)^2+Z(t)^2}} \cdot (W(t)W'(t) + Z(t)Z'(t)). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$f' \cdot \sqrt{W^2 + Z^2} = W \cdot W' + Z \cdot Z' \iff Z' = \frac{f' \cdot \sqrt{W^2 + Z^2} - W \cdot W'}{Z}.$$

Sijoitetaan tunnetut arvot ajanhetkellä t_0:

$$\frac{dZ}{dt}(t_0) = \frac{60 \cdot \sqrt{1,5^2 + 1^2} + 80 \cdot 1}{1,5}\frac{\text{km}}{\text{h}} \cong 125\text{km/h}.$$

3.2 Käänteisfunktion derivaatta

Lause 3.2.1 Oletetaan, että funktio f toteuttaa

1° Funktio f on määritelty pisteen x ympäristössä $B(x,r), r>0$.

2° Funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1}, joka on määritelty pisteen $y := f(x)$ ympäristössä $B(y,s), s>0$. Oletetaan, että f^{-1} on jatkuva pisteessä y.

3° Funktiolla f on derivaatta $f'(x)$ pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$.

Silloin funktiolla f^{-1} on pisteessä y derivaatta, jolle pätee

$$D\Big(f^{-1}\Big)(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Todistus. Sovelletaan lausetta 3.0.11 funktioon f

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h \cdot u(h),$$

missä u on 0:n jossain ympäristössä määritelty kuvaus,

$$\begin{cases} u(0) &= 0 \\ \lim_{h\to 0} u(h) &= 0. \end{cases}$$

Erotusosamäärä f^{-1}:lle pisteessä y on

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k}, \tag{43}$$

Missä k kuuluu johonkin ympäristöön $B(y,s)$; koska f^{-1} on jatkuva pisteessä y, voidaan s valita niin pieneksi, että $f^{-1}(y+k) \in B(x,r)$. Valitaan h siten, että

$$x + h = f^{-1}(y+k).$$

Tällöin

$$f(x+h) - f(x) = f(f^{-1}(y+k)) - y = y + k - y = k,$$

ja (43) saa muodon

$$\begin{aligned} & \frac{x+h-x}{f(x+h)-f(x)} \\ = \; & \frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{h}{f'(x)h - h \cdot u(h)} \\ = \; & \frac{h}{f'(x)+u(h)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

kun $h, k \to 0$. $\square$

Lause 3.2.2 Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Funktio

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

on derivoitava, kun $x > 0$ ja

$$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Todistus. Merkitään

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x > 0.$$

Tällöin f on funktion $g(x) = x^n$ käänteisfunktio ja

$$g'(x) = nx^{n-1}.$$

Lauseesta (3.2.1) seuraa, että

$$f'(x) = \frac{1}{g(f'(x))} = \frac{1}{n(f(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{1-1/n}} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

□

Seuraus 3.2.3 Kaikille rationaalisille eksponenteille q pätee

$$Dx^q = \frac{1}{q}x^{q-1}, \quad x > 0.$$

Todistus. Oletetaan, että $q = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ ja $m \in \mathbf{Z}$. Nyt

$$\begin{aligned} Dx^q &= Dx^{\frac{m}{n}} = D(x^{\frac{1}{n}})^m = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot Dx^{\frac{1}{n}} \\ &= m \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = qx^{q-1} \end{aligned}$$

□

Esimerkki 3.2.4 Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1.$$

Tämä on aidosti kasvava, kun $x > 2$,

$$f([2, \infty[) = [-1, \infty[\,.$$

Funktiolla $f\big|_{[2,\infty[}$ on käänteisfunktio

$$g : [-1, \infty[\to [2, \infty[.$$

Yksinkertaisella laskulla saadaan suoraan

$$g(y) = 2 + \sqrt{y+1} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{2}(y+1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}.$$

Käänteisfunktion derivointikaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 4 = 2(x-2) \\ g'(x) &= \tfrac{1}{f'(g(y))} = \tfrac{1}{2(g(y)-2)} = \tfrac{1}{2\sqrt{y+1}}. \end{aligned}$$

Vastaavasti käsitellään $f\big|_{]-\infty,2]}$:

$$\begin{aligned} \left(f\big|_{]-\infty,2]}\right)^{-1}(y) &= 2 - \sqrt{y+1} = h(y), \quad y \in [-1, \infty[\\ h'(y) &= \tfrac{-1}{2\sqrt{y+1}}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.2.5 Olkoon

$$f(x) = \sqrt{2x-1}, \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Tämä on aidosti kasvava, ja sillä on käänteisfunktio:

$$\begin{aligned} & y &=& \sqrt{2x-1} \\ \iff & y^2 &=& 2x - 1 \\ \iff & x &=& \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2} = g(y) \end{aligned}$$

Laske f:n derivaatta

a) yhdistetyn funktion derivointisäännön avulla

b) käänteisfunktion derivointisäännön avulla.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f'(x) &= \tfrac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \tfrac{1}{\sqrt{2x-1}} \\ \text{b)} \quad f'(x) &= \tfrac{1}{g'(f(x))} = \tfrac{1}{f(x)} = \tfrac{1}{\sqrt{2x-1}}. \end{aligned}$$

Määritelmä 3.2.6 Oletetaan, että f on funktio, joka on määritelty pisteen x ympäristössä. Jos erotusosamäärällä

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on oikean- / vasemmanpuoleinen raja-arvo, siitä sanotaan f:n oikean- / vasemmanpuoleiseksi derivaataksi pisteessä x.

Esimerkki 3.2.7 Laske funktion

$$f(x) = \pi|x-3| + 2$$

oikean- ja vasemmanpuoleiset derivaatat pisteessä 3.

Ratkaisu.

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(3+h)f(3)}{h} = \frac{\pi|3+h-3| + 2 - (\pi|3-3| + 2}{h} = \frac{\pi|h|}{h} = \frac{\pi h}{h} = \pi,$$

koska $h > 0$. Vastaavasti

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(3+h)f(3)}{h} = \pi\frac{|h|}{h} = \pi\frac{-h}{h} = -\pi.$$

4 Derivaatan sovellutuksia

Lause 4.0.8 Oletetaan, että funktiolla f on derivaatta pisteessä $a \in \mathbf{R}$.

a) Jos $f'(a) > 0$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että

  (1) $f(x) < f(a)$ kun $a - r < x < a$ ja

  (2) $f(x) > f(a)$ kun $a < x < a + r$.

b) Jos $f'(a) < 0$, on olemassa $r > 0$ siten, että

  (1) $f(x) > f(a)$ kun $a - r < x < a$ ja

  (2) $f(x) < f(a)$ kun $a < x < a + r$.

Todistus. Todistetaan kohta a). Koska

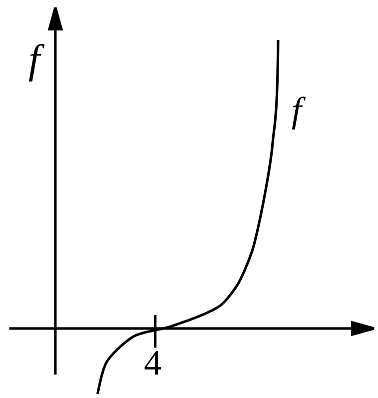
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{y\to a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \tag{44}$$

on suurempi kuin 0, on olemassa r siten, että

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} > 0,$$

kun $0 < |y - a| < r$. Tästä seuraa

(1), jos $a - r < y < a$



Kuva 9: Funktion f kulku

(2), jos $a < y < a + r$.

□

Lause 4.0.9 Oletetaan, että funktio f on määritelty välillä Δ, ja f saa suurimman (tai pienimmän) arvonsa pisteessä a. Oletetaan edelleen, että on olemassa $f'(a)$. Silloin

$$f'(a) = 0. \tag{45}$$

Siis (45) on välttämätön ehto sille, että pisteessä a on f:n suurin arvo, mutta ehto ei ole riittävä. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-4)^3 \\ f'(x) &= 3(x-4)^2 \\ f'(4) &= 0 \end{aligned}$$

mutta f ei saa suurinta arvoaan (edes lokaalista) pisteessä 4 (katso kuva 9). (Funktion suurin ja pienin arvo on määritelty määritelmässä 4.1.1).)

Lause 4.0.10 (Rollen lause) Oletetaan, että

1. funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$
2. f on derivoituva välillä $]a, b[$
3. $f(a) = f(b) = 0$.

Silloin on olemassa $t \in]a,b[$, jossa $f'(t) = 0$.

Esimerkki 4.0.11 Sovellutuksena Rollen lauseelle todistetaan seuraava tulos. Jos $p > 0$, niin yhtälöllä

$$f(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad (p, q, r \in \mathbf{R})$$

on enintään 2 reaalista ratkaisua.

Todistus. Funktio

$$f'(x) = 4x^3 + 2px + q$$

on aidosti kasvava, koska se on summa kahdesta aidosti kasvavasta funktiosta ja vakiosta. Tästä seuraa, että on olemassa enintään 1 piste $b \in \mathbf{R}$ siten, että $f'(b) = 0$. Oletetaan, että funktiolla f on 3 nollakohtaa x_1, x_2, x_3, missä $x_1 < x_2 < x_3$. Rollen lauseesta (4.0.10) seuraa, että on olemassa $y_1 \in]x_1, x_2[$ ja $y_2 \in]x_2, x_3[$ siten, että $f'(y_j) = 0$, missä $j = 1, 2$. Ristiriita! □

Lause 4.0.12 (Väliarvolause) Oletetaan, että

1. funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja
2. f on derivoituva välillä $]a, b[$.

Silloin on olemassa piste $t \in]a, b[$ siten, että

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

eli

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a).$$

Todistus. Määritellään

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Funktio F toteuttaa Rollen lauseen (4.0.10) ehdot, koska

$$\begin{aligned} F(b) &= f(b) - f(a) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) \\ &= f(b) - f(a) - \big(f(b) - f(a)\big) = 0, \end{aligned}$$

samoin $F(a) = 0$. Rollen lauseesta seuraa, että on olemassa $t \in \mathbf{R}$ siten, että $F'(t) = 0$. Näin ollen

$$0 = F'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Lause 4.0.13 (Integraalilaskennan peruslause) Oletetaan, että

1. funktio f on jatkuva välillä $[a,b]$,
2. f on derivoituva välillä $]a,b[$ ja
3. $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in]a,b[$.

Silloin f on vakio välillä $[a,b]$.

Todistus. Olkoon $x \in]a,b]$. Sovelletaan väliarvolausetta (4.0.12) välillä $[a,x]$:

$$f(x) - f(a) = f'(t)(x-a),$$

missä $t \in]a,x[$. Saadaan

$$f'(t) = 0 \Rightarrow f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a).$$

□

Lause 4.0.14 Oletetaan, että funktio f

1. on jatkuva välillä $[a,b]$ ja $f(a) = A$,
2. on derivoituva välillä $]a,b[$ ja
3. $f'(x) \leq M$ kaikille $x \in]a,b[$.

Tällöin

$$f(b) \leq A + M(b-a).$$

Yhtäsuuruus pätee vain funktiolle

$$g(x) := A + M(x-a).$$

Todistus. Olkoon $x \in]a,b]$. Väliarvolauseesta (4.0.12) seuraa, että on olemassa t siten, että

$$f(x) - f(a) = f'(t)(x-a).$$

Kohdasta 3. seuraa, että

$$\begin{aligned} & f(x) - f(a) \leq M(x-a) \\ \iff \quad & f(x) \leq f(a) + M(x-a) = A + M(x-a). \end{aligned} \tag{46}$$

Sijoitetaan tähän $x = b$, saadaan haluttu epäyhtälö.

Oletetaan, että $f(x)$ ei ole sama kuin $g(x)$. Halutaan näyttää, että

$$f(b) < A + M(b-a).$$

Kaavan (46) nojalla aina pätee

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in \,]a,b]\,.$$

Koska $f \neq g$ niin on olemassa

$$x_0 \in \,]a,b]\,, \text{ jolle } f(x_0) < g(x_0).$$

Käytetään jo todistettua lauseen alkuosaa välillä $[x_0, b]$:

$$\begin{aligned} f(b) \leq f(x_0) + M(b-x_0) < g(x_0) + M(b-x_0) &= A + M(x_0 - a) + M(b - x_0) \\ &= A + M(b-a). \end{aligned}$$

äin ollen

$$f(b) < A + M(b-a).$$

□

Samantapaisella tarkastelulla saadaan väliarvolauseesta myös seuraava tulos.

Lause 4.0.15 Oletetaan, että funktio f

1. on derivoituva pisteen a ympäristössä $B(a,h)$, missä $h > 0$, ja
2. $|f'(x)| \leq M \quad \forall\, x \in B(a,h)$.

Silloin

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x-a|$$

kaikille $x \in B(a,h)$.

Esimerkki 4.0.16 Mittauksessa on kulman φ suuruudeksi saatu $44.1°$ ja tiedetään, että mittausvirhe on enintään $0.1°$. Kuinka suuren virheen tämä voi enintään aiheuttaa, kun lasketaan funktion $\tan\varphi$ arvo?

Ratkaisu. Merkitään

φ =kulman tarkka arvo

$\widetilde{\varphi}$ =kulman likiarvo ($= 44.1°$).

Todetaan $\varphi \in [44.0°, 44.2°]$. Sovelletaan lausetta (4.0.15), kun

$$f(x) = \tan x.$$

Pätee

$$D \tan x = 1 + \tan^2 x$$

ja tan on kasvava välillä $[0°, 45°]$, joten

$$D \tan x = 1 + \tan^2 x \le 1 + \tan(\frac{\pi}{4}) = 2.$$

Mutta toisaalta

$$1 + \tan^2 x > 0,$$

joten

$$|D \tan x| \le 2,$$

kun $x \in [44.0°, 44.2°]$. Valitaan lauseessa (4.0.15) $a = \widetilde{\varphi}$, jolloin

$$\varphi \in B(\widetilde{\varphi}, 0.1°) =]44.0°, 44.2°[\,,$$

ja tästä seuraa

$$|\tan \varphi - \tan \widetilde{\varphi}| \le 2 \cdot 0.1° \cdot \frac{\pi}{180°} < 4 \cdot 10^{-3}.$$

Vastaus: Virhe on enintään $4 \cdot 10^{-3}$.

Lause 4.0.17 Ilman todistusta mainitsemme myös seuraavan: Oletetaan, että funktio f

1. on jatkuva (rajoitetulla tai rajoittamattomalla) välillä Δ ja
2. f' on olemassa ja on ≥ 0 kaikissa Δ:n sisäpisteissä.

Silloin f on kasvava välillä Δ. Lisäksi, jos yhtälö $f'(x) = 0$ ei ole voimassa millään Δ:n osavälillä, niin f on aidosti kasvava välillä Δ.

Vastaava tulos pätee tietenkin myös väheneville funktioille olettaen, että derivaatta on negatiivinen.

Esimerkki 4.0.18 Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$ välillä $\Delta = \mathbf{R}$. Tämä on aidosti kasvava koko $\mathbf{R}$:ssä. Funktion derivaatalla $f'(x) = 3x^2$ on yksi nollakohta, piste 0. Derivaatta ei kuitenkaan ole 0 millään $\mathbf{R}$:n osavälillä

$$f'(x) > 0, \text{ kun } x \in \,]-\infty, 0[\,,]0, \infty[\,.$$

Esimerkki 4.0.19 Olkoon

$$f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Näytä, että f on pienenevä.

Ratkaisu.

$$f'(x) = \frac{(1-\cos x)\cos x - (1+\sin x)\sin x}{(1-\cos x)^2} = \frac{(\overbrace{\cos x - 1}^{<0}) - \overbrace{\sin x}^{>0}}{(1-\cos x)^2} < 0$$

kaikilla tarkasteluvälin pisteillä.

4.1 Funktion ääriarvot

Määritelmä 4.1.1 Olkoon funktio f määritelty välillä Δ. Jos on olemassa $x_1 \in \Delta$ siten, että $f(x) \leq f(x_1)$ kaikilla $x \in \Delta$, niin $f(x_1)$ on f:n suurin arvo välillä Δ.

Vastaavasti $f(x_1)$ on f:n pienin arvo jos $f(x) \geq f(x_1)$ kaikilla $x \in \Delta$.

Esimerkki 4.1.2 Funktion $f(x) = x^3$ suurin arvo välillä $\Delta = [0,1]$ on $f(1) = 1$.

Esimerkki 4.1.3 Funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole suurinta arvoa välillä $\Delta = [5, \infty[$. (Mikään x_1 ei toteuta esitettyä vaatimusta: Jos otamme jonkun pisteen x_1, aina löytyy pisteitä x jossa $f(x) > f(x_1)$.)

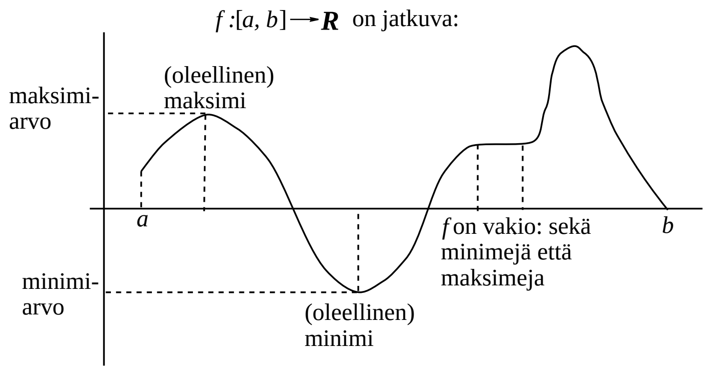
Esimerkki 4.1.4 Funktiolla $f(x) = x^3$ ei ole suurinta arvoa myöskään välillä $\Delta = [0,1[$. Jos $x_1 \in [0,1[$, niin on olemassa lukuja x siten, että $x_1 < x < 1$ ja näille pätee $f(x) > f(x_1)$.

Määritelmä 4.1.5 Funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali maksimikohta (tai lokaali minimikohta) jos $f(x_0)$ on f:n suurin (tai pienin) arvo jossakin x_0:n ympäristössä $B(x,r)$. Vastaava f:n arvo $f(x_0)$ on maksimiarvo (tai minimiarvo).

Yhteisnimitys: (Lokaali) ääriarvokohta, (lokaali) ääriarvo.

Maksimi (tai minimi) on oleellinen, jos $f(x_0) > f(x)$ (tai $f(x_0) < f(x)$) kun

$$x \in B'(x_0, r) = B(x_0, r) \setminus \{x_0\}.$$



Kuva 10: Funktion f ääriarvot

Katso kuva (10).

Lause 4.1.6 Oletetaan, että funktio f on jatkuva pisteen a ympäristössä $B(a,h)$, $h>0$ ja f on derivoituva ympäristössä $B'(a,h)$.

1. Jos $f'(x)>0$, kun $a-h<x<a$ ja $f'(x)<0$, kun $a<x<a+h$, niin f:llä on pisteessä a oleellinen maksimi.

2. Jos $f'(x)<0$, kun $a-h<x<a$ ja $f'(x)>0$, kun $a<x<a+h$, niin f:llä on pisteessä a oleellinen minimi.

Todistus. Todistetaan kohta 1. Lauseesta (4.0.17) seuraa, että kun $a-h<x<a$ pätee $f(x)<f(a)$ ja sama pätee myös kun $a<x<a+h$. □

Huomautus 4.1.7 Aikaisemmin on osoitettu, että jos f on derivoituva pisteessä x_0 ja f:llä on ääriarvo pisteessä x_0, niin $f'(x_0)=0$.

Esimerkki 4.1.8 Määrää funktion

$$f(x)=x(|x|+|x-1|)$$

ääriarvot.

Ratkaisu. Kirjoitetaan

$$f(x)=\begin{cases} x(-x+1-x) \\ x(x+1-x) \\ x(x+x-1) \end{cases} = \begin{cases} x(1-2x), & \text{kun } x\le 0 \\ x, & \text{kun } 0\le x\le 1 \\ x(2x-1), & \text{kun } x\ge 1. \end{cases}$$

Nyt

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 4x, & \text{kun } x < 0 \\ 1, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 4x - 1, & \text{kun } x > 1. \end{cases}$$

Sellaista x ei ole, että $f'(x) = 0$. Muut mahdolliset ääriarvopisteet ovat ne pisteet, joissa f ei ole derivoituva: $x = 0$ ja $x = 1$.

Piste $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 4x > 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1 > 0, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$$

ei ole ääriarvokohta.

Piste $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 > 0, & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 4x - 1 > 0, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

ei ole ääriarvokohta.

Esimerkki 4.1.9 Määrää funktion

$$f(x) = x^2(x-1)^3$$

lokaalit ääriarvot.

Ratkaisu. Funktio f on derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä. Siis kaikissa ääriarvokohdissa $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \cdot 3(x-1)^2 + 2x(x-1)^3 = (x-1)^2\big(3x^2 + 2x(x-1)\big) \\ &= x(3x + 2x - 2)(x-1)^2 = 5x(x - \tfrac{2}{5})(x-1)^2. \end{aligned}$$

Siis $f'(x) = 0$ kun $x = 0, \frac{2}{5}$ tai 1.

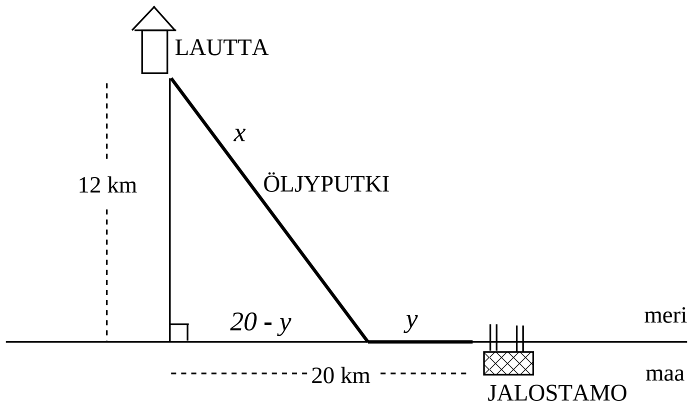
		0	$\frac{2}{5}$	1
$f'(x)$	$+$	- -	$+\,+$	$+\,+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Kuviosta huomataan, että $x = 0$ on funktion maksimi ja $x = \frac{2}{3}$ minimi.

Lause 4.1.10 Jos jatkuvalla funktiolla f on välillä Δ suurin (tai pienin) arvo, f saavuttaa sen lokaalissa maksimi (tai minimi) kohdassa tai välin päätepisteessä (jos sellainen on).

Tarkasteluilla, jotka siirretään myöhempään ajankohtaan, voidaan osoittaa seuraava tärkeä tulos:

Jos Δ on suljettu ja rajoitettu väli, niin jatkuvalla funktiolla on suurin ja pienin arvo välillä Δ.



Kuva 11: Öljyputki lautalta jalostamoon

Esimerkki 4.1.11 Määrää funktion

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 2]$.

Ratkaisu. Tutkitaan funktion nollakohdat ja välin päätepisteet.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0, \quad \text{kun } x = \pm 1.$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= -8 + 6 - 1 = -3 \\ f(-1) &= -1 + 3 - 1 = 1 \\ f(1) &= 1 - 3 - 1 = -3 \\ f(2) &= 8 - 6 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Suurin arvo on 1 ja pienin arvo on -3.

Esimerkki 4.1.12 Tarkastellaan erilaisien öljyputken rakentamistapojen kustannuksia, kun öljyputken rakentaminen merellä maksaa 50 000 euroa/km ja maalla 30 00 euroa/km. Katso kuva (11).

Esimerkiksi jos putki rakennetaan tulemaan kohtisuoraan maihin, mereen rakennettavan putken osuuden kustannuksiksi tulee $12 \cdot 50000$ euroa ja maalle rakennettavan osuuden $20 \cdot 30000$ euroa.

$$\begin{array}{rl} \text{merellä} & 12 \cdot 50000 \\ \text{maalla} & \underline{20 \cdot 30000} \\ \text{yht.} & 1200000 \quad \text{euroa} \end{array}$$

Yhteensä koko putki maksaisi siis 1 200 000 euroa.

Jos taas putki rakennettaisiin suoraan lautalta jalostamolle, maksaisi se 1 166 00 euroa. Tällöin koko putki kulkee merellä ja sen pituus saadaan Pythagoraan lauseesta.

Vedetään putki lautalta pisteeseen y (putken rantautumispisteen etäisyys jalostamosta):

Öljyputken pituus merellä, x, saadaan nyt Pythagoraan lauseen avulla

$$x^2 = 12^2 + (20-y)^2 \Rightarrow x = \sqrt{144 + (20-y)^2}.$$

Haetaan y:tä jolla putken rakentamiskustannus on pienin mahdollinen. Rakentamiskustannus y:n funktiona on

$$f(y) = 50000x + 30000y = 50000\sqrt{144 + (20-y)^2} + 30000y.$$

Halutaan siis tietää tämän funktion pienin arvo, kun $y \in [0, 20] := \Delta$. Funktio $f(y)$ on jatkuva välillä Δ ja derivoituva välin sisäpisteissä. Funktion derivaatta on

$$\begin{aligned} f'(y) &= 50000 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2(20-y)(-1)}{\sqrt{144+(20-y)^2}} + 30000 \\ &= -50000\tfrac{20-y}{\sqrt{144+(20-y)^2}} + 30000. \end{aligned}$$

Ja derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned} f'(y) &= 0 \\ \iff \quad 50000(20-y) &= 30000\sqrt{144+(20-y)^2} \\ \iff \quad \tfrac{5}{3}(20-y) &= \sqrt{144+(20-y)^2} \\ \iff \quad \tfrac{25}{9}(20-y)^2 &= 144 + (20-y)^2 \\ \iff \quad \tfrac{16}{9}(20-y)^2 &= 144 \\ \iff \quad 20-y &= \pm\tfrac{3}{4} \cdot 12 \\ \iff \quad y &= 20 \pm 9. \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat ovat siis 11 ja 29. Jälkimmäinen ei kuulu tarkasteluvälille, joten halvimmat rakentamiskustannukset ovat y:n arvolla 11. Suora sijoitus f:n kaavaan antaa

$$f(11) = 1080000 \text{ euroa.}$$

Esimerkki 4.1.13 Olkoon

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Tutki f:n suurinta ja pienintä arvoa joukossa $\mathbf{R}$.

Ratkaisu. Koska $1 + x^2 > 0$ koko $\mathbf{R}$:ssä, on f jatkuva ja derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä. Lisäksi

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Edelleen,

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$

kun $x = \pm 1$. Koska $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ja

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$$

niin on olemassa sellainen $M > 0$, että $|f(x)| < \frac{1}{4}$, kun $|x| \geq M$.

Väite: f:n suurin arvo on $\frac{1}{2}$ ja pienin arvo on $-\frac{1}{2}$.

Todistus. On osoitettava, että

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall\, x \in \mathbf{R} \tag{47}$$

ja

$$f(x) \geq -\frac{1}{2} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}. \tag{48}$$

Jos $|x| > M$, niin $|f(x)| < \frac{1}{4}$, joten (47) ja (48) toteutuvat. Tarkastellaan tilannetta $x \in [-M, M]$. Välin päätepisteissä $|f(M)|$, $|f(-M)| \leq \frac{1}{4}$, joten (47) ja (48) toteutuvat. Suurin ja pienin arvo ovat f':n nollakohdissa, eli suurin $f(1) = \frac{1}{2}$ ja pienin $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Muilla $x \in [-M, M]$ (47) ja (48) toteutuvat. $\square$

4.2 Newtonin menetelmä

Newtonin menetelmän avulla voidaan approksimoida yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisuja, mikäli f toteuttaa tietyt edellytykset. Katso kuva (12).

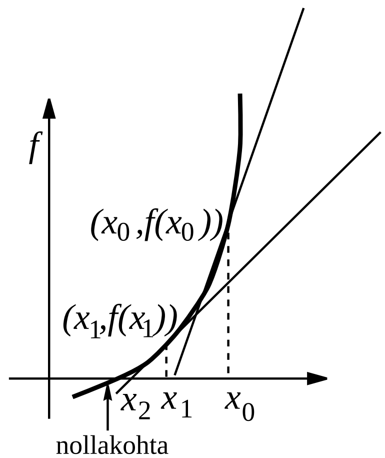
Menetelmän ensimmäiset askeleet ovat seuraavat.

1. Arvataan (enemmän tai vähemmän perustellusti) lähtöpiste x_0 tarkasteluväliltä.

2. Piirretään pisteeseen x_0 funktion f kuvaajaan tangentti.

3. Asetetaan $x_1 :=$ tangentin ja x-akselin leikkauskohta.

4. Piirretään pisteeseen $(x_1, f(x_1))$ tangentti.



Kuva 12: Newtonin menetelmä funktiolle f

5. Asetetaan $x_2 :=$ tangentin ja x-akselin leikkauskohta.

Yleisesti, jos piste x_n on löydetty, seuraava piste lasketaan kaavasta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tämä vastaa edellä mainittua geometrista menettelyä: Pisteen $(x_n, f(x_n))$ tangentin yhtälö on

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste $(x_{n+1}, 0)$ toteuttaa

$$\begin{aligned} 0 - f(x_n) &= f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \\ \Rightarrow x_{n+1} &= x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned} \tag{49}$$

Newtonin menetelmässä siis arvataan x_0 (esimerkiksi kuvaajasta, mahdollisimman läheltä oletettua nollakohtaa). Jos n:s approksimaatio x_n on laskettu, x_{n+1} saadaan kaavasta (49).

Esimerkki 4.2.1 Lasketaan $\sqrt{2}$:n likiarvo. Tämä vastaa yhtälön

$$f(x) := x^2 - 2 = 0$$

positiivisen ratkaisun arviointia.

Ratkaisu. Koska
$$f(x) = x^2 - 2 \quad \text{ja} \quad f'(x) = 2x,$$
yhtälö (49) saa muodon
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$
Asetetaan $x_0 = 1$ ja lasketaan
$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1.5 \\ x_2 &= 1.41667 \\ x_3 &= 1.41422 \text{ (5 oikeaa numeroa!)} \end{aligned}$$
Newtonin menetelmän suppenemisesta tiedetään seuraavaa. Oletetaan, että funktiolla f on nollakohta $r \in \mathbf{R}$. Jos on olemassa ympäristö $B(r,h)$, $h > 0$ ja C, $0 < C < 1$ siten, että
$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq C \quad \forall x \in B(r,h)$$
niin Newtonin menetelmä suppenee arvoon r, jos x_0 on valittu joukosta $B(r,h)$.

4.3 Korkeammat derivaatat

Jos funktio f on derivoituva välin Δ jokaisessa pisteessä, derivaatta f' määrittelee funktion $\Delta \to \mathbf{R}$.

Jos tällä funktiolla on pisteessä x derivaatta, tätä sanotaan f:n toiseksi derivaataksi pisteessä x, merkitään $f''(x)$ tai $f^{(2)}(x)$. Yleisesti, n:n kertaluvun derivaatta $f^{(n)}(x)$ tai $D^{(n)}f(x)$ tai $\frac{d^n f}{dx^n}$, määritellään $(n-1)$:n kertaluvun derivaatan derivaattana.

Funktiota, jolla on kaikkien kertalukujen derivaatat, sanotaan C^∞ -funktioksi.

Esimerkki 4.3.1 Polynomit ovat C^∞-funktioita (koko $\mathbf{R}$:ssä). Jos $\deg(P) = n$, niin
$$\deg \underbrace{\left(\frac{d^k P}{dx^k}\right)}_{\text{polynomi}} = n - k, \quad k \leq n.$$

Jos $k > n$, niin
$$\frac{d^k P}{dx^k} = 0.$$

Esimerkki 4.3.2 Kun $P = x^4 - 2x$,
$$\frac{d^2 P}{dx^2} = D(4x^3 - 2) = 12x^2.$$

Esimerkki 4.3.3 Olkoon $f(x) = |x|^3$.
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x \leq 0. \end{cases}$$

Alueessa $\{x > 0\}$ f on polynomi; täällä $f \in C^\infty(\{x > 0\})$. Alueessa $\{x < 0\}$ f on polynomi; täällä $f \in C^\infty(\{x < 0\})$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} 3x^2 & , x > 0 \\ -3x^2 & , x < 0 \end{cases} = 3x|x| \quad \forall x \neq 0 \\
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{|h|^3}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{hh|h|^3}{h} = 0 \\
f''(x) &= \begin{cases} 6x & , x > 0 \\ -6x & , x < 0 \end{cases} \\
f''(0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{3h|h|}{h} = \lim_{h\to 0} 3|h| = 0 \\
f'''(x) &= \begin{cases} 6 & , x > 0 \\ -6 & , x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Koska f''':n oikeanpuoleinen derivaatta 0:ssa on
$$\lim_{h\to 0+} \frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{6h}{h} = 6.$$

Samoin nähdään, että vasemmanpuoleinen on -6. Näin ollen ei ole o lemassa derivaattaa $f'''(0)$.

Määritelmä 4.3.4 Olkoon funktio f derivoituva välillä Δ. Käyrää $y = f(x)$ sanotaan alas(ylös)päin kuperaksi, jos käyrä ei ole missään pisteessä tangenttinsa alapuolella (yläpuolella).

Lause 4.3.5 Funktiosta f oletetaan

1. f on derivoituva välillä Δ

2. f' on kasvava välillä Δ ($f'(x) \geq f'(y)$, kun $x > y$).

Silloin käyrä on alaspäin kupera välillä Δ.

Tämä tapahtuu esimerkiksi jos $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$.

Määritelmä 4.3.6 Piste x_0 on käännepiste, jos $f''(x_0) = 0$ ja $f''(x)$ on erimerkkinen pisteen x_0 eri puolilla (jossakin ympäristössä).

Esimerkki 4.3.7 Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = (x-4)^3.$$

Funktion toisen kertaluvun derivaatta ($f''(x) = 6(x-4)$) saa negatiivisia arvoja kun $x < 4$ (alaspäin kupera) ja positiivisia kun $x > 4$ (ylöspäin kupera). Näin ollen 4 on f:n käännepiste.

Toista derivaattaa voidaan käyttää hyväksi ääriarvojen tutkimisessa.

Lause 4.3.8 Jos $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, niin funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali minimi (vastaavasti jos $f''(x) < 0$, maksimi).

Todistus sivuutetaan.

Lause 4.3.9 Oletetaan että välillä $[a, \infty[$ määritetty funktio f toteuttaa

1. f ja f' ovat jatkuvia kun $x \geq a$.,
2. $f'(a) > 0$,
3. f'' on olemassa ja $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \geq a$.

Silloin

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

4.4 Lisää transsendenttisista alkeisfunktioista

Määrittelimme aiemmin Neperin luvun raja-arvona

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbf{R}.$$

Jos $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, olemme määritelleet a:n mielivaltaisen rationaalisen potenssin a^x, $x \in \mathbf{Q}$. Siis, kun $x \in \mathbf{Q}$, on myös luku e^x määritelty.

Seuraavan lauseen todistuksen jätämme nyt väliin:

Lause 4.4.1 Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{Q}$ jono siten, että

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Silloin jono $(e^{x_n})_{n=1}^{\infty}$ suppenee (johonkin reaalilukuun) ja raja-arvo ei riipu jonon (x_n) valinnasta. Jos $x \in \mathbf{Q}$ niin

$$\lim_{n \to \infty} e^{x_n} = e^x.$$

Näin ollen voimme määritellä:

Määritelmä 4.4.2 Kaikille $x \in \mathbf{R}$ määrittelemme

$$e^x = \lim_{n \to \infty} e^{x_n},$$

missä $(x_n) \subset \mathbf{Q}$ on jono joka suppenee x:ään. Kuvausta $x \mapsto e^x$ sanotaan (e-kantaiseksi) eksponenttifunktioksi, merkitään myös $\exp(x)$.

Lause 4.4.3 Eksponenttifunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $e^{x+y} = e^x e^y$ kaikille $x, y \in \mathbf{R}$,
2. se on jatkuva, aidosti kasvava ja derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä,
3. $De^x = e^x$.

Tässä kohta 3. seuraa kaavasta

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

sekä eksponentin yhteenlaskukaavasta 1: Kaikilla $x \in \mathbf{R}$

$$De^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x.$$

Seuraus 4.4.4 Funktion exp n:s derivaatta on exp kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Lause 4.4.5 Funktiolla exp on seuraavat raja-arvot:

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Tarkemmin sanoen, jos $n \in \mathbf{N}$, niin

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \tag{50}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x^n = 0.$$

Todistus. Todistetaan (50):

$$D\left(\frac{e^x}{x^n}\right) = \frac{e^x x^n - ne^x x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{e^x(x-n)}{x^{n+1}} > 0,$$

kun $x > n$.

$$D^{(2)}\left(\frac{e^x}{x^n}\right) = \ldots = \frac{e^x}{x^{n+2}}\Big((x-n)^2 + n\Big) > 0,$$

kun $x > 0$. Lauseesta (4.3.9) seuraa, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

□

Esimerkki 4.4.6 Lasketaan funktion xe^x n:s derivaatta. Väitämme, että se on

$$D^{(n)}(xe^x) = (n+x)e^x. \tag{51}$$

Todistus. Tapaus $n = 1$:

$$D(xe^x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

Induktio-oletus: Oletetaan että (51) pätee arvolla $n \in \mathbf{N}$. Silloin

$$\begin{aligned} D^{(n+1)}(xe^x) &= DD^{(n)}(xe^x) = D\Big((n+x)e^x\Big) = D(ne^x) + D(xe^x) \\ &= ne^x + (1+x)e^x = (n+1+x)e^x. \end{aligned}$$

Siis (51) pätee arvolla $n+1$. □

4.5 Logaritmifunktio

Funktio exp on aidosti kasvava koko $\mathbf{R}$:ssä ja lisäksi $\exp(\mathbf{R}) =]0, \infty[$. Näin ollen exp:llä on käänteisfunktio

$$\left\{ \begin{array}{l} \log \\ \ln \end{array} \right. :]0, \infty[\to \mathbf{R}.$$

Muistisääntönä todetaan, että $\log x$ on luku, johon potenssiin e pitää korottaa, että saadaan x. Siis

$$e^{\log x} = x \quad \forall\, x > 0$$

ja

$$\log e^{x} = x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Lause 4.5.1 Jos $x, y > 0$, niin

- $\log(xy) = \log x + \log y$
- $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$
- $\log(\frac{1}{x}) = \log(x^{-1}) = -\log x$
- $\log x^a = a \log x \ \forall a \in \mathbf{R}$.

Todistetaan näistä ensimmäinen: Eksponentin yhteenlaskukaavan nojalla

$$xy = e^{\log x} \cdot e^{\log y} = e^{\log x + \log y}.$$

Nyt $\log xy$ on se luku johon e pitää korottaa, että saadaan xy. Johtamamme kaavan nojalla kyseinen luku on

$$\log x + \log y. \qquad \square$$

Lause 4.5.2

$$D \log x = \frac{1}{x} \ \forall\ x > 0$$

ja

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{(\log x)^n} = \infty \ \forall\ n \in \mathbf{N}.$$

Todistus. Derivointikaava seuraa käänteisfunktion derivointikaavasta:

$$D \log x = \frac{1}{(D \exp)(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Jälkimmäinen kaava seuraa lauseesta (4.4.5). □

Huomautus 4.5.3 Funktio log on aidosti kasvava, mutta sen kasvuvauhti on hyvin hidasta. Kuitenkin pätee

$$\lim_{x \to \infty} \log x = \infty.$$

4.6 Muut exponentti- ja logaritmifunktiot

Olkoon $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$. Määritellään

$$a^x := e^{x \log a} = \exp(x \log a).$$

Tälle pätevät

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $Da^x = a^x \cdot \log a$

Funktio a^x on aidosti kasvava, jos $a > 1$ ja aidosti vähenevä jos $a < 1$.

Funktion a^x käänteisfunktio on funktio

$$\log_a x :]0, \infty[\to \mathbf{R}.$$

Tälle pätee

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

ja

$$D(\log_a x) = \frac{1}{(\log a)x}.$$

4.7 Yleinen potenssifunktio

Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Määritellään funktio

$$x \mapsto x^a, \quad x > 0$$

kaavalla

$$x^a := e^{a \log x}.$$

Kun

$a > 0$ on funktio kasvava,

$a < 0$ on funktio vähenevä ja

$a = 0$ on funktio vakiofunktio, $x^a = 1$.

Lause 4.7.1 Jos $a, b \in \mathbf{R}$ ja $x > 0$, niin

- $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$
- $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$, $x > 0$
- $Dx^a = ax^{a-1}$.

Todistus. Todistetaan derivointikaava yhdistetyn funktion derivointikaavaa käyttäen:

$$Dx^a = De^{a \log x} = e^{a \log x} \cdot a\frac{1}{x} = x^a a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

□

Määritelmä 4.7.2 Funktio $x \mapsto x^x$, $x > 0$, määritellään kaavalla

$$x^x = e^{x \log x}.$$

Motivaationa näille määritelmille on eksponentin laskusääntö

$$e^{xy} = (e^x)^y.$$

Tästä seuraa esimerkiksi

$$e^{x \log x} = (e^{\log x})^x = x^x.$$

4.8 Hyperboliset funktiot

Hyperbolinen sini:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Hyperbolinen kosini:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Hyperbolinen tangentti:

$$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Hyperbolinen kotangentti:

$$\coth x := \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Hyperbolisille funktioille pätevät seuraavat yhtälöt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}.$$

Derivaatat:

$$\begin{aligned} D \sinh x &= \cosh x \\ D \cosh x &= \sinh x \\ D \tanh x &= \tfrac{1}{\cosh^2 x} \\ D \coth x &= -\tfrac{1}{\sinh^2 x} \end{aligned}$$

Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan areafunktioiksi.

$$\begin{aligned} (\sinh)^{-1}(x) &=: \operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \ \forall\, x \in \mathbf{R} \\ (\cosh)^{-1}(x) &=: \operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \text{ kun } x \geq 1 \\ (\tanh)^{-1}(x) &=: \operatorname{artanh}(x) = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1+x}{1-x} \text{ kun } x \in \,]-1, 1[\\ (\coth)^{-1}(x) &=: \operatorname{arcoth}(x) = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{x+1}{x-1} \text{ kun } x \in \,]-1, 1[\,. \end{aligned}$$