Analyyysi I

Jari Taskinen

18. lokakuuta 2001

Sisältö

1 Reaaliluvut

Tavallisimmat lukujoukot, kuten luonnolliset luvut

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

kokonaisluvut

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

rationaaliluvut

$$\mathbf{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$$

ja reaaliluvut $\mathbf{R}$, ovat tuttuja jo koulukurssista. Jatkossa joukkojen $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ ja $\mathbf{Q}$ suhteen tyydymme siihen intuitioon, joka meillä näistä jo on. Toteamme vain, että kokonaislukujen joukko $\mathbf{Z}$ on otettu käyttöön siksi, että on mahdollista käsitellä, kuinka pienemmästä luonnollisesta luvusta vähennetään suurempi. Samoin, kokonaislukujen jakolaskun vaatimukset johtavat joukon $\mathbf{Q}$ käyttöön ottoon.

Joukosta $\mathbf{N}$ huomautamme vielä, että toisinaan luku 0 luetaan siihen; tällä kurssilla kuitenkaan ei. Tämä on lähinnä makuasia. Lisäksi joukkoon $\mathbf{N}$ liittyy tärkeä induktioperiaate, josta lisää piakkoin.

Reaalilukujen joukon $\mathbf{R}$ erottaa joukosta $\mathbf{Q}$ ominaisuus, jota sanotaan täydellisyydeksi; $\mathbf{R}$:llä tämä ominaisuus on, $\mathbf{Q}$:lla ei. Asiasta lisää myöhemmin. Käytännössä ei ole kovin vaikea havaita, että "on olemassa"lukuja jotka eivät ole rationaalisia: ympyrän kehän suhde halkaisijaan; luku, jonka neliö on 2 jne.

Tutkitaan seuraavia määritelmiä:

Olkoon $\mathbf{K}$ joukko, jossa on määritelty laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$.

Määritelmä A. Joukko $\mathbf{K}$ varustettuna edellä mainituilla laskutoimituksilla on kunta, jos laskutoimitukset toteuttavat kaikilla x, y ja $z \in \mathbf{K}$ seuraavat ehdot:

(A1) $x + y = y + x$

(A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(A3) On olemassa yhteenlaskun nolla-alkio, eli alkio $a \in \mathbf{K}$ joka toteuttaa $x + a = x$ (kaikilla $x \in \mathbf{K}$). (Yleensä merkitään tätä alkiota symbolilla 0.)

(A4) Kaikilla $x \in \mathbf{K}$ on olemassa vasta-alkio $y \in \mathbf{K}$, joka toteuttaa $x+y = 0$. Yleensä merkitään $y =: -x$.

(A5) $x \cdot y = y \cdot x$

(A6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(A7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(A8) On olemassa (kertolaskun neutraalialkio) $b \in \mathbf{K}$, $b \neq 0$, joka toteuttaa $b \cdot x = x$ kaikille $x \in \mathbf{K}$. Yleensä merkitään $b =: 1$.

(A9) Kaikilla $x \neq 0$ on olemassa käänteisalkio $y \in \mathbf{K}$, joka toteuttaa $x \cdot y = 1$. Merkitään $y =: 1/x$ tai x^{-1}.

Määritelmä B. Olkoon $\mathbf{K}$ kunta (kuten yllä). Se on järjestetty kunta, jos $\mathbf{K}$:ssa on määritelty relaatio $<$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(B1) Kaikille $x, y \in \mathbf{K}$ pätee täsmälleen yksi ehdoista $x < y$, $x = y$, $y < x$.

(B2) Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$.

(B3) Jos $x < y$, niin kaikilla $z \in \mathbf{K}$ pätee $x + z < y + z$.

(B4) Jos $0 < x$ ja $0 < y$, niin $0 < x \cdot y$.

Määritelmä C. Reaalilukujen joukko $\mathbf{R}$ on järjestetty kunta, joka on täydellinen. (Täydellisyys tarkoittaa, että jokaisella ylhäältä rajoitetulla osajoukolla $E \subset \mathbf{R}$ on olemassa pienin yläraja joukossa $\mathbf{R}$.)

Luonnollisten lukujen joukko on joukko $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$. Tälle joukolle pätee induktioperiaate:

Jos $S \subset \mathbf{N}$ on sellainen osajoukko että $1 \in S$ ja $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$, niin S on itse asiassa yhtä kuin joukko $\mathbf{N}$.

Lause. Reaalilukujen joukko on olemassa.

Seurauksia aksioomista (A1)-(A9)

- kunnan alkiot ovat 0 ja 1 yksikäsitteisiä. (Jos otetaan joku muu alkio $b \in \mathbf{K}$, joka ei ole 1, niin se ei toteuta ehtoa (A8))
- sääntöjä:

  a) jos $a + x = a + y$, niin $x = y$

  b) jos $a \cdot x = a \cdot y$ jollekin $a \neq 0$, niin $x = y$

c) yhtälöllä $x + a = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = b - a$

d) yhtälöllä $x \cdot a = b$, missä $a \neq 0$, on ratkaisu $x = \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$

e) vasta-alkioille pätee:

$$\begin{aligned}
&-(-x) = x \\
&-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y) \\
&(-x) \cdot (-y) = x \cdot y \\
&-(x + y) = (-x) + (-y) \text{ jne.}
\end{aligned}$$

Huomautus! Jatkossa tuttuun tapaan " $\cdot$ " voi jättää pois näkyvistä.

- $x \cdot y = xy$
- $20 \cdot x = 20x$
- MUTTA EI $2 \cdot 3 = 23$

Todistetaan seurauksista kohta a) ja vasta-alkion yksikäsitteisyys.

Todistus.

$$\begin{aligned}
a + x &= a + y \Rightarrow \\
a + x + (-a) &= a + y + (-a) \Rightarrow \\
a + (-a) + x &= a + (-a) + y \Rightarrow \\
0 + x &= 0 + y \Rightarrow \\
x &= y
\end{aligned}$$

□

Väite: Jos $x \in \mathbf{K}$, niin sen vasta-alkio on yksikäsitteinen.

Todistus. Olkoon $b \in \mathbf{K}$ toinen x:n vasta-alkio, siis $x + b = 0$. Siis (A4)

$$\begin{aligned}
x + b &= 0 \Rightarrow \\
x + b + (-x) &= -x \Rightarrow \\
x + (-x) + b &= -x \Rightarrow \\
0 + b &= -x \Rightarrow \\
b &= -x
\end{aligned}$$

□

Seurauksia aksioomista (B1)-(B4)

- jos $x \leq y$ ja $x \geq y$ niin $x = y$

- jos $x < y$ ja $a < b$ niin $x + a < y + b$
- jos $x < y$ ja $a > 0$, niin $ax < ay$

Merkintöjä:

- $x > y$ tarkoittaa $y < x$
- $x \leq y$ tarkoittaa $x < y$ tai $x = y$
- $x \geq y$ tarkoittaa $x > y$ tai $x = y$

Määritelmä 1.1 (Potenssiin korotus induktiolla.) Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Määritellään $x^1 := x$. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Jos x^n on määritelty, niin määritellään $x^{n+1} := x^n x$. Jos lisäksi $x \neq 0$, niin määritellään $x^0 := 1$ ja $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.

Esimerkki. $x^5 := xx^4 := xxx^3 := xxxx^2 := xxxxx$.

Lause 2. Jos $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ja $m, n \in \mathbf{N}$, niin pätee

a) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

b) $(x^m)^n = x^{mn}$

Todistus. a) Suoritetaan todistus induktiolla luvun $n \in \mathbf{N}$ suhteen.
1° Jos $n = 1$, niin
$$x^{m+1} = x \cdot x^m = x^m \cdot x$$
eli a) pätee.
2° Oletamme että a) pätee jollekin n, eli
$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n \tag{1}$$
Tulee näyttää, että a) pätee arvolle $n + 1$, eli
$$x^{m+n+1} = x^m x^{n+1}$$
(Voimme käyttää hyväksi määritelmää 1 ja kohtaa 1°).
$$x^{m+n+1} = xx^{m+n} = xx^m x^n = x^m xx^n = x^m x^{n+1}$$

b) Induktiolla luvun n suhteen.

- Olkoon $n = 1$.
$$(x^m)^1 = x^m = x^{m1}$$

- Oletetaan että b) pätee arvollla n, eli

$$(x^m)^n = x^{mn} \tag{2}$$

On osoitettava, että se pätee arvolla $n+1$, eli

$$(x^m)^{n+1} = x^{m(n+1)}$$

Pätee, koska

$$(x^m)^{n+1} = (x^m)^n \cdot (x^m) = x^{mn} \cdot x^m = x^{mn+m} = x^{m(n+1)}$$

□

Lause 3. Kahden reaaliluvun x ja y, missä $x \neq y$, välillä on aina rationaaliluku.

Määritelmä 4. Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Sen itseisarvo $|x|$ määritellään seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{kun} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Siis aina $|x| \geq 0$, olipa x mikä tahansa reaaliluku.

Lause 5. Itseisarvolla on seuraavat ominaisuudet:

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|xy| = |x||y|$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, kun $y \neq 0$

c) $|x| = |-x|$ (Todistus kohdan b) avulla, ota $y = -1$)

d) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Kolmioepäyhtälö = △ -ey)

e) $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$

d') $|x-y| \leq |x| + |y|$

e') $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

Todistus. Todistetaan kohdat d) ja e). Määritelmästä seuraa $-|x| \leq x \leq |x|$ ja $-|y| \leq y \leq |y|$. Lasketaan puolittain yhteen:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

eli

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Nyt jälkimmäinen epäyhtälö on todistettu, lasketaan edelleen

$$|x| = |x + y + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x + y|.$$

Vastaavasti näytetään, että $|y| - |x| \leq |x + y|$. Näistä saadaan $|x + y| \geq \Big||x| - |y|\Big|$ □

Esimerkki. Kirjoita seuraavat lausekkeet ilman itseisarvomerkkejä.

a) $|x + 2| - |x - \sqrt{3}|$

b) $\Big||x - \pi| - 8\Big|$

c) $|x^2 + 5|$

d) $|x^2 - 5|$

a)

$$\begin{cases} x + 2, & \text{kun} \quad x + 2 \geq 0 \\ -x - 2, & \text{kun} \quad x + 2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2, & \text{kun} \quad x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{kun} \quad x \leq -2 \end{cases}$$

samoin,

$$|x - \sqrt{3}| = \begin{cases} x - \sqrt{3}, & \text{kun} \quad x \geq \sqrt{3} \\ -x + \sqrt{3}, & \text{kun} \quad x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Yhteenveto

$$\begin{aligned} |x + 2| - |x - \sqrt{3}| &= \begin{cases} -x - 2 - (-x + \sqrt{3}), & \text{kun} \quad x \leq -2 \\ x + 2 - (-x + \sqrt{3}), & \text{kun} \quad -2 \leq x \leq \sqrt{3} \\ x + 2 - (x - \sqrt{3}), & \text{kun} \quad \sqrt{3} \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2 - \sqrt{3}, & x \leq -2 \\ 2x + 2 - \sqrt{3}, & -2 \leq x \leq \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3}, & x \geq \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

b)

$$\Big||x - \pi| - 8\Big| = \begin{cases} |x - \pi - 8|, & \text{kun} \quad x \geq \pi \\ |\pi - x - 8|, & \text{kun} \quad x \leq \pi \end{cases}$$

Oletetaan $x \geq \pi$. Tällöin

$$|x - \pi - 8| = |x - (\pi + 8)| = \begin{cases} x - (\pi + 8), & \text{kun} \quad x \geq \pi + 8 \\ -x + (\pi + 8), & \text{kun} \quad x \leq \pi + 8 \end{cases}$$

Oletetaan $x \leq \pi$. Tällöin

$$|\pi - 8 - x| = |x - (\pi - 8)| = \begin{cases} x - (\pi - 8), & x \geq \pi - 8 \\ -x + (\pi - 8), & x \leq \pi - 8 \end{cases}$$

Siis

$$\big||x - \pi| - 8\big| = \begin{cases} -x + (\pi - 8), & \text{kun} \quad x \leq \pi - 8 \\ x - (\pi - 8), & \text{kun} \quad \pi - 8 \leq x \leq \pi \\ -x + (\pi + 8), & \text{kun} \quad \pi \leq x \leq \pi + 8 \\ x - (\pi + 8), & \text{kun} \quad x \geq \pi + 8 \end{cases}$$

c) $|x^2 + 5| = x^2 + 5$, koska $x^2 + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

d)

$$|x^2 - 5| = \begin{cases} x^2 - 5, & \text{kun} \quad x \leq -\sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x \geq \sqrt{5} \\ -x^2 + 5, & \text{kun} \quad -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \end{cases},$$

koska $f(x) = x^2 - 5 = 0$ kun $x = \pm\sqrt{5}$.

Esimerkki. Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$. Pätee $|x| < |y|$ jos ja vain jos $x^2 < y^2$.

Todistus. a) Oletetaan $|x| < |y|$, jos $x = 0$, niin $|x| = 0$ ja $x^2 = 0$. Koska $|y| > |x| = 0$, pätee $y \leq 0$ ja $y^2 = 0$. Siis $y^2 > x^2$. Jos $x \leq 0$, niin $|x| > 0$. Tällöin $x^2 = |x|^2 = |x||x| < |x||y| < |y||y| = y^2$. Joten, $|x| < |y| \Rightarrow x^2 < y^2$.

b) Epäsuora todistus: Oletetaan $|x| < |y|$ ei päde. Siis, $|x| \geq |y|$. Samanlainen päättely kuin edellä $\Rightarrow |x|^2 \geq |y|^2$ eli $x^2 \geq y^2$. Siten $x^2 < y^2$ ei päde. □

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $|\frac{x-1}{x+1}| < 1$.

Ratkaisu. Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $|\frac{x-1}{x+1}| < |1|$ kanssa. Yllä olevan nojalla tämä $\iff$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 1^2 = 1 \\ \iff \quad & \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} < 1 \quad | \cdot (x+1)^2 \\ \iff \quad & (x-1)^2 < (x+1)^2 \\ \iff \quad & x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1 \\ \iff \quad & 4x > 0 \iff x > 0. \end{aligned}$$

Ratkaisu on siis $x > 0$.

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö

$$x - 1 < |x + 1|. \tag{3}$$

Ratkaisu. Oletetaan ensin $x+1 \geq 0$ eli $x \geq -1$. Silloin (3) $\iff$ $x-1 < x+1$ $\iff$ $-1 < 1$, totta (x:stä riippumatta kun $x \geq -1$). Oletetaan sitten $x+1 < 0$ eli $x < -1$. Silloin (3) $\iff$ $x-1 < -x-1$ $\iff$ $2x < 0$ $\iff$ $x < 0$, totta. Siis (3) toteutuu $\forall x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki. Oletetaan, että x toteuttaa $|x-\sqrt{5}| < \frac{1}{700}$. Osoita, että

$$|x^2 - 3x - (\sqrt{5}^2 - 3\sqrt{5})| < \frac{1}{10}.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
& |x^2 - 3x - \left((\sqrt{5})^2 - 3\sqrt{5}\right)| = |x^2 - (\sqrt{5})^2 - 3x + 3\sqrt{5}| \\
\leq \quad & |x^2 - (\sqrt{5})^2| + |-3x + 3\sqrt{5}| \\
= \quad & |(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})| + |-3(x-\sqrt{5})| \\
\leq \quad & |x-\sqrt{5}||x+\sqrt{5}| + |-3||x-\sqrt{5}| \qquad (4)
\end{aligned}$$

Tässä $|x-\sqrt{5}| < \frac{1}{700}$. Koska $\sqrt{5} < 3$ ja $\frac{1}{700} < 1$, niin $x < 4$. Koska $\sqrt{5} < 2$ ja $\frac{1}{700} < 1$, niin $x > 1$. Siis $|x| \leq 4$ ja $|x+\sqrt{5}| \leq |x| + \sqrt{5} \leq 7$. Siten (4) on enintään

$$|x-\sqrt{5}| \cdot 7 + 3 \cdot |x-\sqrt{5}| = 10|x-\sqrt{5}| < \frac{10}{700} = \frac{1}{70} < \frac{1}{10}.$$

Esimerkki. Todista, että lauseke

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

on suurempi luvuista x ja y.

Todistus. Oletetaan $x \geq y$. Silloin

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$$

Oletetaan $y > x$. Silloin

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = \frac{1}{2} \cdot 2y = y.$$

□

1.1 R:n topologiaa

Määritelmä 6. Olkoon $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Merkitään

- $]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli)
- $]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ (puoliavoin väli)
- $]a, \infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$
- $[a, \infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$

Määritelmä 7. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(x, r) = \{y \in \mathbf{R} \mid |x - y| < r\}$$

on nimeltään x:n r-ympäristö. Samoin

$B'(x, r) = \{y \in \mathbf{R} \mid 0 < |x-y| < r\} = \{y \in \mathbf{R} \mid |x-y| < r, y \neq x\}$(punkteerattu ympäristö)

ja

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbf{R} \mid |x - y| \leq r\}(\text{suljettu ympäristö}).$$

Nämä ovat **R**:n osajoukkoja. ($B' \subset B \subset \bar{B}$.)

Esimerkki. Olkoon $x = 2$ ja $r = \frac{1}{10}$.

$$y \in B(2, \frac{1}{10}) \iff 2 - \frac{1}{10} < y < 2 + \frac{1}{10}.$$

Samoin jos $x = 2$ ja $r = \frac{1}{1000}$

$$y \in B(2, \frac{1}{1000}) \iff 2 - \frac{1}{1000} < y < 2 + \frac{1}{1000} \iff y \in [2 - \frac{1}{1000}, 2 + \frac{1}{1000}].$$

Tehtävä. Kuuluuko π seuraaviin joukkoihin?

a) $B(3, \frac{1}{100})$, b) $B(3, \frac{1}{10})$
c) $B(3, \frac{1}{2})$, d) $B(3.14, \frac{1}{100})$

Määritelmä 1.7. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Joukko A on avoin, jos jokaisella $x \in A$ on (jokin) ympäristö $B(x,r)$ joka sisältyy A:han.

Joukko $B \subset \mathbf{R}$ on suljettu, jos joukko $\mathbf{R} \setminus B = \{y \in \mathbf{R} \mid y \neq B\}$ on avoin.

Esimerkki. Suljettu väli $[a,b]$ ei ole avoin. Tarkastellaan pistettä b: ei ole olemassa mitään ympäristöä $B(b,r)$ jolle $B(b,r) \subset [a,b]$.

Esimerkki. Olkoon $x = 13$. Osoita $B(x,1) \cap B(x,\frac{1}{5}) \cap B(x,\frac{1}{2}) := Y$ on x:n r-ympäristö jollekin $r > 0$.

Ratkaisu. Pätee $B(x,\frac{1}{5}) \subset B(x,\frac{1}{2}) \subset B(x,1)$. Siis $Y = B(x,\frac{1}{5})$ eli Y on x:n $\frac{1}{5}$-ympäristö.

Määritelmä 8. Joukko $A \subset \mathbf{R}$ on avoin, jos $\forall x \in A$ on olemassa sellainen $r > 0$ että $B(x,r) \subset A$. Joukko $B \subset \mathbf{R}$ on suljettu, jos $\mathbf{R} \setminus B$ on avoin.

Lause 9. a) $\mathbf{R}$ on sekä avoin että suljettu, samoin $\emptyset$. (Muut $\mathbf{R}$:n osajoukot eivät voi olla yhtä aikaa avoimia ja suljettuja. Sen sijaan on olemassa osajoukkoja, jotka eivät ole avoimia eivätkä myöskään suljettuja, esimerkiksi $[0,1[$)

b) Avoin väli on avoin joukko, suljettu väli on suljettu joukko.

c) Äärellinen joukko on suljettu (s.o. joukko johon kuuluu vain äärellisen monta alkiota, esim $\{\frac{1}{2}, -2, \pi, \sqrt{13}\}$ on, $\left[0, \frac{1}{10^2}\right]$ ei ole äärellinen joukko.)

d) Mielivaltaisen monen avoimen joukon yhdiste on avoin joukko.

e) Äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin joukko.

Esimerkki. Olkoon $A_n = \left]\sqrt{1+n}, n^2\right[\quad \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Silloin A_n on avoin väli, joten se on avoin joukko. Siis

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}, n \geq 2} A_n \subset \mathbf{R}$$

on avoin.

Esimerkki. $]-1,2[\cap]0,3[\cap]0,10[=]0,2[$

Esimerkki. Olkoon $n \in \mathbf{N}, A_n := \left]0, 1 + \frac{1}{n}\right[$ (avoimia joukkoja). Ja olkoon

$$B := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Väite: $B =]0,1]$.

Todistus. Ensiksi, Osoitetaan että

$$]0,1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, 1 + \frac{1}{n}\right[=: B.$$

Olkoon näet $x \in]0,1]$. Tällöin $x \in \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[= A_n \forall n$. Siis $x \in B$, eli $]0,1] \subset B$.

Kääntäen, olkoon $y > 1$. Valitaan n s.e. $\frac{1}{n} < y - 1$. Tällöin $y \notin \left]0, 1+\frac{1}{n}\right[= A_n$. Siis $B =]0,1]$. Puoliavoin väli ei ole avoin joukko.

Äärettömän monen avoimen joukon leikkaus ei siten ole välttämättä avoin. $\square$

1.2 Kompleksiluvut

$\mathbf{R}^2$ on lukuparien (a,b), missä a ja b reaalilukuja, muodostama joukko. (Käytetään myös esitystä $(a,b) = a\bar{i} + b\bar{j}$, missä $\bar{i} = (0,1)$ ja $\bar{j} = (0,1)$.) Sanotaan, että (a,b) on lukupari, piste, vektori, tason alkio joukossa $\mathbf{R}^2$. On määritelty vektoreiden yhteenlasku

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

ja reaaliluvulla $r \in \mathbf{R}$ kertominen

$$r(a,b) = (ra, rb).$$

Määritellään nyt kertolasku kaavalla.

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, bc + ad) \quad \text{missä } a,b,c,d \in \mathbf{R} \tag{5}$$

On mahdollista osoittaa että joukko $\mathbf{R}^2$ varustettuna edellä mainitulla yhteenlaskulla ja kertolaskulla (5) toteuttaa kanta-aksioomat (A1) - (A9).

Merkitään: $(0,1) = i$ ja $(a,b) = a + ib$.

Joukkoa $\mathbf{R}^2$ varustettuna edellä mainituilla laskutoimituksilla sanotaan kompleksilukujen joukoksi (kunnaksi), ja merkitään $\mathbf{C}$:llä.

Kaava (5) saa muodon

$$(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(bc + ad).$$

Huom! $(0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0)$ eli $i^2 = ii = -1$.

Jos $a, b \in \mathbf{R}$, niin lukua $a+ib$ sanotaan kompleksiluvuksi, ja a on sen reaaliosa ja b imaginaariosa.

Määritelmä. Luku $|a+ib| := \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ on kompleksiluvun $a+ib$ itseisarvo eli moduli.

Esimerkki. Laske seuraavien kompleksilukujen reaali- ja imaginääriosat.

1. $3(2+i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot i = 6 + 3i$.

2. $\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5}i) = (\sqrt{2}^2) - \sqrt{2}\sqrt{5}i = 2 - \sqrt{10}i$.

3. $3i(2+i) = 3i \cdot 2 + 3i \cdot i = 6i + 3i^2 = 6i - 3$.

4. Olkoon $x, y \in \mathbf{R}$. $(x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

5. $4i(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = 4i(\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}2i - \sqrt{2}2 - \sqrt{2}i\sqrt{2}i)$

$$\begin{aligned}
&= 4i(2 + 2\sqrt{2}i - 2i - 2\sqrt{2} \cdot (-1)) \\
&= 4i(2 + 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} - 2)) \\
&= 8i + 8\sqrt{2}i + 4 \cdot (-1)(2\sqrt{2} - 2) \\
&= \underbrace{i(8 + 8\sqrt{2})}_{\text{Im-osa}} - \underbrace{8\sqrt{2} + 8}_{\text{Re-osa}}.
\end{aligned}$$

6. $4i^5 + 3i^3 = 4(i^2 \cdot i^2 \cdot i) + 3i^2 \cdot i = 4 \cdot (-1) \cdot (-1)i + 3 \cdot (-1) \cdot i = 4i - 3i = i$

7. $(i^3 + 1)(4i^4 + i^2) = (i^2 \cdot i + 1)(4 \cdot i^2 \cdot i^2 - 1) = (-i + 1)(4 - 1) = 3 - 3i$

Olkoon $z \in \mathbf{C}, z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}$. Merkitään $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ on moduli eli itseisarvo.

Esimerkki. $|3 - 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Esimerkki. $|i| = \sqrt{0 + 1^2} = 1$ joten $|i|^k = 1, \forall k \in \mathbf{N}$.

Olkoon $z = x + iy$ kuten yllä. z:n liittoluku määritellään $\overline{z} = x - iy$. Pätee

$$z\overline{x} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - iy + iy - i^2y = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Siis, $z\overline{z} = |z|^2 \forall z \in \mathbf{C}$.

Kompleksilukujen kertolaskun tärkein motivaatio on se, että jokaisella $z = x + iy \neq 0$ on käänteisalkio z^{-1} eli $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{x+iy} = z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{6}$$

(Tällöin $z\overline{z}^{-1} = 1 = z^{-1}z$:

$$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = (x+iy)(x-iy)\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = (x^2+y^2)\frac{1}{x^2+y^2} = 1.)$$

Kompleksilukujen jakolasku määritellään ($z = x + iy, w = a + ib, x, y, a, b \in \mathbf{R}$)

$$\frac{z}{w} := z \cdot w^{-1} =: \frac{x+iy}{a+ib} := \frac{ax+by}{a^2+b^2} + i\frac{ay-bx}{a^2+b^2}.$$

Esimerkkejä: Laske seuraavien kompleksilukujen reaali- ja imaginääriosat.

1. $\dfrac{1}{2+i} = \dfrac{2}{5} - i\dfrac{1}{5}$ (kaava (6), $x = 2, y = 1$).

Toinen tapa: lavennetaan nimittäjän liittoluvlla

$$^{2-i)}\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-i}{2^2-i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

Moduli: $\left|\frac{1}{2+i}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(Huom! Modulille pätee: Jos $z, w \in \mathbf{C}$, niin $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$. Edellä, $\left|\frac{1}{2+i}\right| = \frac{1}{|2+1|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$)

2. $^{\sqrt{2}+i)}\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}+1^2} = \dfrac{1}{3}(\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}i-1) = \dfrac{1}{3}(1+2\sqrt{2}i) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}i.$

3. $^{3-i)}\dfrac{1}{3+i} +^{4-i)} \dfrac{2}{4+i} = \dfrac{3-i}{3^2+1^2} + \dfrac{8-2i}{4^2+1} = \dfrac{3-i}{10} + \dfrac{8-2i}{17} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{8}{17} - \dfrac{i}{10} - \dfrac{2i}{17} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{8}{17} - i\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{17}\right)$. Reaaliosa on $\frac{3}{10} + \frac{8}{17}$, imaginääriosa on $\frac{1}{10} + \frac{2}{17}$.

4.Olkoon $x \in \mathbf{R}$.

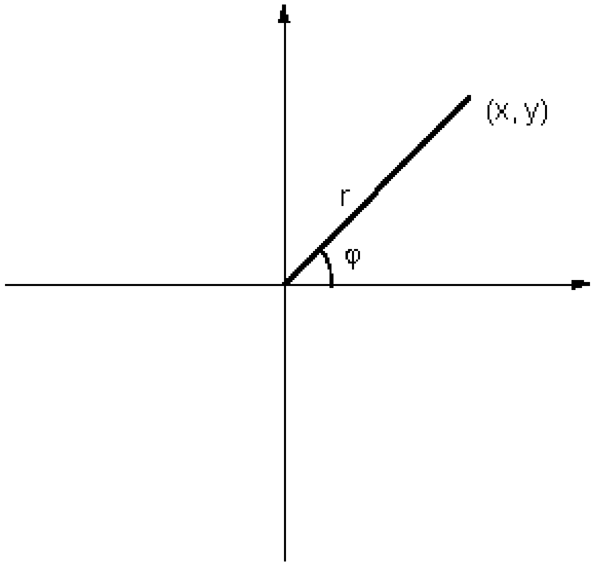
$$\begin{aligned}
&^{2+i)}\frac{x+ix^2}{2-i} +^{2-i)} \frac{x^2+ix}{2+i} \\
= \quad & \frac{(2+i)(x+ix^2)}{2^2+1} + \frac{(2-i)(x^2+ix)}{2^2+1} \\
= \quad & \frac{2x+ix+2ix^2-x^2}{5} + \frac{2x^2-ix^2+2ix-i^2x}{5} \\
= \quad & \frac{1}{5}(2x+ix+i2x^2-x^2+2x^2-ix^2+2ix+x) \\
= \quad & \frac{1}{5}(3x+x^2+i(3x+x^2)) \\
= \quad & \underbrace{\frac{3x+x^2}{5}}_{\text{Re osa}} +i \underbrace{\frac{3x+x^2}{5}}_{\text{Im osa}}.
\end{aligned}$$

Ko. luvun moduli:

$$\left|\frac{3x+x^2}{5} + i\frac{3x+x^2}{5}\right| = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{3x+x^2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5}\left|3x+x^2\right|.$$

1.3 Napakoordinaattiesitys

Kuva (1) havainnollistaa napakoordinaattiesitystä: $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$



Kuva 1: Napakoordinaattiesitys

Siis,

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}, r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ja } \varphi = \overline{\text{arc}}\tan\frac{y}{x}.$$

Siirrytään kompleksitasoon; z olkoon $z = x+iy$. Edeltä saadaan $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Mainitsemme ilman todistusta, että imaginääriselle exponentille pätee

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ (Eulerin kaava)}$$

missä $\varphi \in [0, 2\pi]$ tai $\varphi \in \mathbf{R}$.

Kompleksiluvuille saadaan siis esitys

$$z = re^{i\varphi}, r = |z|, \varphi \text{ argumentti eli vaihekulma.}$$

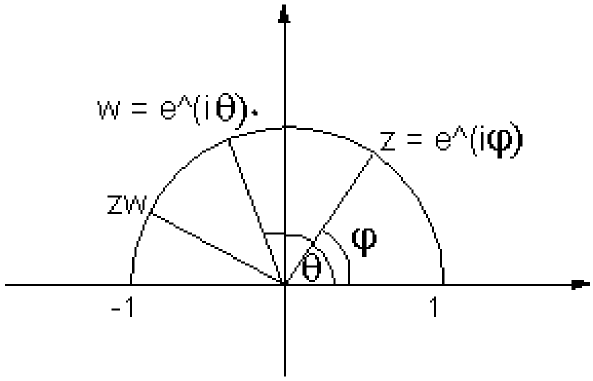
Imaginaariselle exponentille pätevät tutut laskusäännöt, esim.

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}, a, b \in \mathbf{R}.$$

Olkoon $z = re^{i\varphi}, w = se^{i\theta}, \varphi, \theta, \in \mathbf{R}$. Tällöin siis

$$zw = (re^{i\varphi})(se^{i\theta}) = rse^{i(\varphi+\theta)}.$$

Katso kuva (2).



Kuva 2: Napakoordinaattiesitys 2

Havainto:

Kompleksilukujen kertolaskussa

- vaihekulmat lasketaan yhteen
- modulit kerrotaan keskenään

Katso kuva (3).

1.4 Reaalilukujonoista

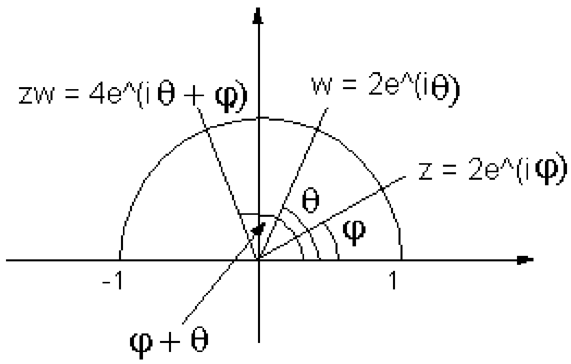
Jos jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbf{N}$ kohti valitaan joku reaaliluku $x_n \in \mathbf{R}$, saadaan (reaaliluku)jono

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

jota merkitään myös $(x_n)_n^\infty = 1$, tai $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. (Täsmällinen määritelmä: lukujono on kuvaus eli funktio joukosta $\mathbf{N}$ joukkoon $\mathbf{R}$.)

Esimerkkejä: $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^\infty = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots)$, $\left(\frac{\cos n}{\sin(n\pi)+3}{}_{n=1}^\infty\right)$, $\left(n^{100} + \frac{n}{3}\right)_{n=1}^\infty$.

Sanomme, että x_n on jonon n:s alkio tai n:s koordinaatti.



Kuva 3: Napakoordinaattiesitys 3

Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Jono

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \text{ eli } (x_n)_{n=1}^{k}$$

on äärellinen lukujono. (Esim. $\mathbf{R}^2 = \{(a, b)\}$.)

Määritelmä 1.10 Jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee raja-arvoon $a \in \mathbf{R}$, jos seuraava pätee. Jokaista mielivaltaista $r > 0$ kohti voidaan löytää luku $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < r, \text{ kun } n \geq N$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \to \infty} X_n = a$.

Jos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei suppene (mihinkään reaalilukuun), se hajaantuu.

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa

$$\left(\frac{1}{n+3} + 2\right)_{n=1}^{\infty} = (2 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{5}, 2 + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{7}, \ldots).$$

Näyttää suppenevan kohti lukua 2. Kuinka tämä todistetaan käyttäen määritelmää 1.10?

Olkoon $r > 0$ mielivaltainen.
1. Tarkastellaan lauseketta

$$|x_n - a|, \text{ missä } \frac{1}{n+3} + 2 = x_n \text{ ja } a = 2;$$

siis

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n+3} + 2 - 2\right| = \left|\frac{1}{n+3}\right| = \frac{1}{n+3}$$

2. Tarkastellaan milloin

$$|x_n - a| < r \text{ eli } \frac{1}{n+3} < r. \tag{7}$$

Tämä voidaan esim. käsittää epäyhtälönä n:lle, missä n voidaan ratkaista r:n avulla.

$$(7) \iff n+3 > \frac{1}{r} \iff n > \frac{1}{r} - 3.$$

Otetaan joku $N \in \mathbf{N}$ joka on suurempi kuin $\frac{1}{r} - 3$. Jos nyt $n > N$, niin

$$n > N \geq \frac{1}{r} - 3 \Longrightarrow |x_n - a| < r.$$

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots) = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. Suppeneeko tämä jono?

1. Suppeneeko jono esim. arvoon $a = 1$?

Tarkastellaan lauseketta

$$|X_n - a| = |(-1)^n - 1| = \begin{cases} |-2| = 2, & \text{jos } n \text{ pariton} \\ 0, & \text{jos } n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Oletetaan esimerkiksi $r = \frac{1}{100}$. Päteekö nyt

$$|x_n - a| < \frac{1}{100}, \forall\, n \geq N?$$

Mutta olipa N miten suuri tahansa, aina löytyy parittomia lukuja $n > N$ jolloin $|x_n - a| = 2$. Yllä oleva epäyhtälö ei päde $\forall n \geq \mathbf{N}$, joten jono ei suppene arvoon 1.

2. Suppeneeko jono johonkin muuhun $a \in \mathbf{R}$?

Tutkitaan jälleen lauseketta

$$|x_n - a| = |(-1)^n - a| = \begin{cases} |-1-a|, & n \text{ pariton} \\ |1-a|, & n \text{ parillinen} \end{cases} = \begin{cases} |1+a|, & n \text{ pariton} \\ |1-a|, & n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Jompikumpi näistä on suurempi kuin 1, olipa a mikä tahansa reaaliluku.

Jos taas esim. $r = \frac{1}{10}$, niin joko parittomille tai parillisille n

$$|x_n - a| \geq 1 > \frac{1}{10}$$

eli $|x_n - a| < \frac{1}{10}$ ei päde. Näin ollen jono ei suppene a:han.

Määritelmä 1.11 Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono. Tämä jono on

a) nouseva, jos $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$

b) laskeva, jos $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$

c) aidosti nouseva, jos $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$

aidosti laskeva, jos $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$

Jono on monotoninen, jos se on joko nouseva tai laskeva.

Olkoon $N \in \mathbf{N}$. Jono (a_n) on

d) nouseva indeksistä N alkaen, jos $a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \ldots$

e) laskeva indeksistä N alkaen, jos $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq \ldots$

Tässä ei siis ole merkitystä sillä, miten ensimmäiset jonon alkiot käyttäytyvät.

Lause 1.12 Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nouseva jono indeksistä N alkaen. Jos on olemassa $M \in \mathbf{R}$ s.e.

$$x_n \leq M \ \forall \ n \in \mathbf{N}, \tag{8}$$

niin jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee, ja raja-arvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin M.

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa $(3, 3.3, 3.14, 3, 141, 3.1415, 3.14159, \ldots)$; jonon alkio x_n on π:n arvo katkaistuna n:nen desimaalin kohdalta. Silloin $x_n \in \mathbf{Q}$. Edellä Lausessa 1.12 voidaan ottaa esim. $M = 4$. Näin ollen raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \pi \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}.$$

Esimerkki. Tarkastellaan lukujonoa

$$(X_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

missä a on jokin kiinteä reaaliluku.

Voidaan osoittaa, että (X_n) on ylhäältä rajoitettu (eli (7) pätee) ja lisäksi nouseva, kun $n > |a|$. Lauseen 1.12 nojalla jonolla $\exists$ raja-arvo.

Tapauksella $a = 1$ merkitään

$$\lim_{n \to \infty} X_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \text{ (Neperin luku)}$$

Todistuksessa käytetään Bernoullin epäyhtälöä:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na, \text{ kun } a > -1, n \in \mathbf{N}.$$

Todistus. Todistus induktiolla:

1° $n = 1$ (1.4) $\iff$ $1 + a \geq 1 + a$ tosi.
2° Induktio-oletus: (1.4) pätee arvolla n. Osoitetaan, että se pätee arvolla $n + 1$.

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)^n(1+a) \geq (1+an)(1+a) \geq 1+\underbrace{an + a}_{(n+1)a}+\underbrace{a^2n}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)a.$$

$\square$