

Analyysi I

Jari Taskinen

7. huhtikuuta 2002

Luku 1

Sisältö

1	Reaaliluvut	2
1.1	\mathbb{R} :n topologiaa	14
1.2	Kompleksiluvut	18
1.3	Napakoordinaattiesitys	22
1.4	Reaalilukujonoista	25

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbb{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 1 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

1. Reaaliluvut

Reaaliluvut

Tavallisimmat lukujoukot, kuten luonnolliset luvut

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

kokonaisluvut

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

rationaaliluvut

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$$

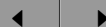
ja reaaliluvut \mathbf{R} , ovat tuttuja jo koulukurssista. Jatkossa joukkojen \mathbf{N} , \mathbf{Z} ja \mathbf{Q} suhteen tyydymme siihen intuitioon, joka meillä näistä jo on. Toteamme vain, että kokonaislukujen joukko \mathbf{Z} on otettu käyttöön siksi, että on mahdollista käsitellä, kuinka pienemmästä luonnollisesta luvusta vähennetään suurempi. Samoin, kokonaislukujen jakolaskun vaatimukset johtavat joukon \mathbf{Q} käyttöön ottoon.

Joukosta \mathbf{N} huomautamme vielä, että toisinaan luku 0 luetaan siihen; tällä kurssilla kuitenkin ei. Tämä on lähinnä makuasia. Lisäksi joukkoon \mathbf{N} liittyy tärkeä induktioperiaate, josta lisää piakkoin.

Reaalilukujen joukon \mathbf{R} erottaa joukosta \mathbf{Q} ominaisuus, jota sanotaan täydellisyydeksi; \mathbf{R} :llä tämä ominaisuus on, \mathbf{Q} :lla ei. Asiasta lisää myöhemmin. Käytännössä ei ole kovin vaikea havaita, että "on olemassa" lukuja jotka eivät ole rationaalisia: ympyrän kehän suhde halkaisijaan; luku, jonka neliö on 2 jne.

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu



Sivu 2 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Tutkitaan seuraavia määritelmiä:

Olkoon \mathbf{K} joukko, jossa on määritelty laskutoimitukset $+$ ja \cdot .

Määritelmä A. Joukko \mathbf{K} varustettuna edellä mainituilla laskutoimituksilla on kunta, jos laskutoimitukset toteuttavat kaikilla x, y ja $z \in \mathbf{K}$ seuraavat ehdot:

(A1) $x + y = y + x$

(A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(A3) On olemassa yhteenlaskun nolla-alkio, eli alkio $a \in \mathbf{K}$ joka toteuttaa $x + a = x$ (kaikilla $x \in \mathbf{K}$). (Yleensä merkitään tätä alkiota symbolilla 0.)

(A4) Kaikilla $x \in \mathbf{K}$ on olemassa vasta-alkio $y \in \mathbf{K}$, joka toteuttaa $x + y = 0$. Yleensä merkitään $y =: -x$.

(A5) $x \cdot y = y \cdot x$

(A6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(A7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(A8) On olemassa (kertolaskun neutraalialkio) $b \in \mathbf{K}$, $b \neq 0$, joka toteuttaa $b \cdot x = x$ kaikille $x \in \mathbf{K}$. Yleensä merkitään $b =: 1$.

(A9) Kaikilla $x \neq 0$ on olemassa käänteisalkio $y \in \mathbf{K}$, joka toteuttaa $x \cdot y = 1$. Merkitään $y =: 1/x$ tai x^{-1} .

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 3 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Määritelmä B. Olkoon \mathbf{K} kunta (kuten yllä). Se on järjestetty kunta, jos \mathbf{K} :ssa on määritelty relaatio $<$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(B1) Kaikille $x, y \in \mathbf{K}$ pätee täsmälleen yksi ehdoista $x < y$, $x = y$, $y < x$.

(B2) Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$.

(B3) Jos $x < y$, niin kaikilla $z \in \mathbf{K}$ pätee $x + z < y + z$.

(B4) Jos $0 < x$ ja $0 < y$, niin $0 < x \cdot y$.

Määritelmä C. Reaalilukujen joukko \mathbf{R} on järjestetty kunta, joka on täydellinen. (Täydellisyys tarkoittaa, että jokaisella ylhäältä rajoitetulla osajoukolla $E \subset \mathbf{R}$ on olemassa pienin yläraja joukossa \mathbf{R} .)

Luonnollisten lukujen joukko on joukko $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$. Tälle joukolle pätee induktioperiaate:

Jos $S \subset \mathbf{N}$ on sellainen osajoukko että $1 \in S$ ja $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$, niin S on itse asiassa yhtä kuin joukko \mathbf{N} .

Lause. Reaalilukujen joukko on olemassa.

Seurauksia aksioomista (A1)-(A9)

- kunnan alkiot ovat 0 ja 1 yksikäsitteisiä. (Jos otetaan joku muu alkio $b \in \mathbf{K}$, joka ei ole 1, niin se ei toteuta ehtoa (A8))

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Sivu 4 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

- sääntöjä:

a) jos $a + x = a + y$, niin $x = y$

b) jos $a \cdot x = a \cdot y$ jollekin $a \neq 0$, niin $x = y$

c) yhtälöllä $x + a = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x = b - a$

d) yhtälöllä $x \cdot a = b$, missä $a \neq 0$, on ratkaisu $x = \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$

e) vasta-alkioille pätee:

$$-(-x) = x$$

$$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$$

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

$$-(x + y) = (-x) + (-y) \text{ jne.}$$

Huomautus! Jatkossa tuttuun tapaan ” · ” voi jättää pois näkyvistä.

- $x \cdot y = xy$

- $20 \cdot x = 20x$

- MUTTA EI $2 \cdot 3 = 23$

Todistetaan seurauksista kohta a) ja vasta-alkion yksikäsitteisyys.

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbb{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu



Sivu 5 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Todistus.

$$\begin{aligned}a + x &= a + y \Rightarrow \\a + x + (-a) &= a + y + (-a) \Rightarrow \\a + (-a) + x &= a + (-a) + y \Rightarrow \\0 + x &= 0 + y \Rightarrow \\x &= y\end{aligned}$$

□

Väite: Jos $x \in \mathbf{K}$, niin sen vasta-alkio on yksikäsitteinen.

Todistus. Olkoon $b \in \mathbf{K}$ toinen x :n vasta-alkio, siis $x + b = 0$. Siis (A4)

$$\begin{aligned}x + b &= 0 \Rightarrow \\x + b + (-x) &= -x \Rightarrow \\x + (-x) + b &= -x \Rightarrow \\0 + b &= -x \Rightarrow \\b &= -x\end{aligned}$$

□

Seurauksia aksioomista (B1)-(B4)

- jos $x \leq y$ ja $x \geq y$ niin $x = y$
- jos $x < y$ ja $a < b$ niin $x + a < y + b$
- jos $x < y$ ja $a > 0$, niin $ax < ay$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 6 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Merkintöjä:

- $x > y$ tarkoittaa $y < x$
- $x \leq y$ tarkoittaa $x < y$ tai $x = y$
- $x \geq y$ tarkoittaa $x > y$ tai $x = y$

Määritelmä 1.1 (Potenssiin korotus induktiolla.) Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Määritellään $x^1 := x$. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Jos x^n on määritelty, niin määritellään $x^{n+1} := x^n x$. Jos lisäksi $x \neq 0$, niin määritellään $x^0 := 1$ ja $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$.

Esimerkki. $x^5 := x x^4 := x x x^3 := x x x x^2 := x x x x x$.

Lause 2. Jos $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ja $m, n \in \mathbf{N}$, niin pätee

a) $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

b) $(x^m)^n = x^{mn}$

Todistus. a) Suoritetaan todistus induktiolla luvun $n \in \mathbf{N}$ suhteen.

1° Jos $n = 1$, niin

$$x^{m+1} = x \cdot x^m = x^m \cdot x$$

eli a) pätee.

2° Oletamme että a) pätee jollekin n , eli

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n \tag{1}$$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 7 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Tulee näyttää, että a) pätee arvolle $n + 1$, eli

$$x^{m+n+1} = x^m x^{n+1}$$

(Voimme käyttää hyväksi määritelmää 1 ja kohtaa 1°).

$$x^{m+n+1} = x x^{m+n} = x x^m x^n = x^m x x^n = x^m x^{n+1}$$

b) Induktiolla luvun n suhteen.

- Olkoon $n = 1$. $(x^m)^1 = x^m = x^{m \cdot 1}$
- Oletetaan että b) pätee arvolla n ,

On osoitettava, että se pätee arvolla $n + 1$, eli

$$(x^m)^{n+1} = x^{m(n+1)}$$

Pätee, koska

$$(x^m)^{n+1} = (x^m)^n \cdot (x^m) = x^{mn} \cdot x^m = x^{mn+m} = x^{m(n+1)}$$

□

Lause 3. Kahden reaalityluvun x ja y , missä $x \neq y$, välillä on aina rationaaliluku.

Määritelmä 4. Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Sen itseisarvo $|x|$ määritellään seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ -x, & \text{kun } x \leq 0 \end{cases}$$

Sisältö:
Reaalityluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalitylukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 8 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Siis aina $|x| \geq 0$, olipa x mikä tahansa reaaliluku.

Lause 5. Itseisarvolla on seuraavat ominaisuudet:

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|xy| = |x||y|$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, kun $y \neq 0$

c) $|x| = |-x|$ (Todistus kohdan b) avulla, ota $y = -1$)

d) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Kolmioepäyhtälö = \triangle -ey)

e) $||x| - |y|| \leq |x + y|$

d') $|x - y| \leq |x| + |y|$

e') $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Todistus. Todistetaan kohdat d) ja e). Määritelmästä seuraa $-|x| \leq x \leq |x|$ ja $-|y| \leq y \leq |y|$. Lasketaan puolittain yhteen:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

eli

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Nyt jälkimmäinen epäyhtälö on todistettu, lasketaan edelleen

$$|x| = |x + y + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x + y|.$$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbb{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 9 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Vastaavasti näytetään, että $|y| - |x| \leq |x + y|$. Näistä saadaan $|x + y| \geq \left| |x| - |y| \right|$ \square

Esimerkki. Kirjoita seuraavat lausekkeet ilman itseisarvomerkkejä.

a) $|x + 2| - |x - \sqrt{3}|$

b) $\left| |x - \pi| - 8 \right|$

c) $|x^2 + 5|$

d) $|x^2 - 5|$

a)

$$\begin{cases} x + 2, & \text{kun } x + 2 \geq 0 \\ -x - 2, & \text{kun } x + 2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2, & \text{kun } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{kun } x \leq -2 \end{cases}$$

samoin,

$$|x - \sqrt{3}| = \begin{cases} x - \sqrt{3}, & \text{kun } x \geq \sqrt{3} \\ -x + \sqrt{3}, & \text{kun } x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

Yhteenveto

$$\begin{aligned} |x + 2| - |x - \sqrt{3}| &= \begin{cases} -x - 2 - (-x + \sqrt{3}), & \text{kun } x \leq -2 \\ x + 2 - (-x + \sqrt{3}), & \text{kun } -2 \leq x \leq \sqrt{3} \\ x + 2 - (x - \sqrt{3}), & \text{kun } \sqrt{3} \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2 - \sqrt{3}, & x \leq -2 \\ 2x + 2 - \sqrt{3}, & -2 \leq x \leq \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3}, & x \geq \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbb{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 10 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

b)

$$|x - \pi| - 8 = \begin{cases} |x - \pi - 8|, & \text{kun } x \geq \pi \\ |\pi - x - 8|, & \text{kun } x \leq \pi \end{cases}$$

Oletetaan $x \geq \pi$. Tällöin

$$|x - \pi - 8| = |x - (\pi + 8)| = \begin{cases} x - (\pi + 8), & \text{kun } x \geq \pi + 8 \\ -x + (\pi + 8), & \text{kun } x \leq \pi + 8 \end{cases}$$

Oletetaan $x \leq \pi$. Tällöin

$$|\pi - 8 - x| = |x - (\pi - 8)| = \begin{cases} x - (\pi - 8), & x \geq \pi - 8 \\ -x + (\pi - 8), & x \leq \pi - 8 \end{cases}$$

Siis

$$|x - \pi| - 8 = \begin{cases} -x + (\pi - 8), & \text{kun } x \leq \pi - 8 \\ x - (\pi - 8), & \text{kun } \pi - 8 \leq x \leq \pi \\ -x + (\pi + 8), & \text{kun } \pi \leq x \leq \pi + 8 \\ x - (\pi + 8), & \text{kun } x \geq \pi + 8 \end{cases}$$

c) $|x^2 + 5| = x^2 + 5$, koska $x^2 + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

d)

$$|x^2 - 5| = \begin{cases} x^2 - 5, & \text{kun } x \leq -\sqrt{5} \text{ tai } x \geq \sqrt{5} \\ -x^2 + 5, & \text{kun } -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \end{cases},$$

koska $f(x) = x^2 - 5 = 0$ kun $x = \pm\sqrt{5}$.

Esimerkki. Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$. Pätee $|x| < |y|$ jos ja vain jos $x^2 < y^2$.

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 11 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Todistus. a) Oletetaan $|x| < |y|$, jos $x = 0$, niin $|x| = 0$ ja $x^2 = 0$. Koska $|y| > |x| = 0$, pätee $y \leq 0$ ja $y^2 = 0$. Siis $y^2 > x^2$. Jos $x \leq 0$, niin $|x| > 0$. Tällöin $x^2 = |x|^2 = |x||x| < |x||y| < |y||y| = y^2$. Joten, $|x| < |y| \Rightarrow x^2 < y^2$.

b) Epäsuora todistus: Oletetaan $|x| < |y|$ ei päde. Siis, $|x| \geq |y|$. Samanlainen päättely kuin edellä $\Rightarrow |x|^2 \geq |y|^2$ eli $x^2 \geq y^2$. Siten $x^2 < y^2$ ei päde. \square

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $|\frac{x-1}{x+1}| < 1$.

Ratkaisu. Epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $|\frac{x-1}{x+1}| < |1|$ kanssa. Yllä olevan nojalla tämä \Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 < 1^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} < 1 \quad | \cdot (x+1)^2 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 < (x+1)^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x + 1 \\ \Leftrightarrow & 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0. \end{aligned}$$

Ratkaisu on siis $x > 0$.

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö

$$x - 1 < |x + 1|. \quad (2)$$

Ratkaisu. Oletetaan ensin $x + 1 \geq 0$ eli $x \geq -1$. Silloin (2) $\Leftrightarrow x - 1 < x + 1 \Leftrightarrow -1 < 1$, totta (x :stä riippumatta kun $x \geq -1$). Oletetaan sitten $x + 1 < 0$ eli $x < -1$.

Sisältö:
 Reaaliluvut
 R:n topologiaa
 Kompleksiluvut
 Napakoordi-
 naattiesitys
 Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 12 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Silloin (2) $\iff x - 1 < -x - 1 \iff 2x < 0 \iff x < 0$, totta. Siis (2) toteutuu $\forall x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki. Oletetaan, että x toteuttaa $|x - \sqrt{5}| < \frac{1}{700}$. Osoita, että

$$|x^2 - 3x - (\sqrt{5}^2 - 3\sqrt{5})| < \frac{1}{10}.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} & |x^2 - 3x - ((\sqrt{5})^2 - 3\sqrt{5})| = |x^2 - (\sqrt{5})^2 - 3x + 3\sqrt{5}| \\ & \leq |x^2 - (\sqrt{5})^2| + |-3x + 3\sqrt{5}| \\ & = |(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})| + |-3(x - \sqrt{5})| \\ & \leq |x - \sqrt{5}||x + \sqrt{5}| + |-3||x - \sqrt{5}| \end{aligned} \quad (3)$$

Tässä $|x - \sqrt{5}| < \frac{1}{700}$. Koska $\sqrt{5} < 3$ ja $\frac{1}{700} < 1$, niin $x < 4$. Koska $\sqrt{5} < 2$ ja $\frac{1}{700} < 1$, niin $x > 1$. Siis $|x| \leq 4$ ja $|x + \sqrt{5}| \leq |x| + \sqrt{5} \leq 7$. Siten (3) on enintään

$$|x - \sqrt{5}| \cdot 7 + 3 \cdot |x - \sqrt{5}| = 10|x - \sqrt{5}| < \frac{10}{700} = \frac{1}{70} < \frac{1}{10}.$$

Esimerkki. Todista, että lauseke

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

on suurempi luvuista x ja y .

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 13 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Todistus. Oletetaan $x \geq y$. Silloin

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x.$$

Oletetaan $y > x$. Silloin

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = \frac{1}{2} \cdot 2y = y.$$

□

1.1. \mathbf{R} :n topologiaa

\mathbf{R} :n topologiaa

Määritelmä 6. Olkoon $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Merkitään

- $]a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ (avoin väli)
- $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (suljettu väli)
- $[a, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ (puoliavoin väli)
- $]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ (puoliavoin väli)
- $]a, \infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$
- $[a, \infty[= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 14 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$

Määritelmä 7. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja $r > 0$. Joukko

$$B(x, r) = \{y \in \mathbf{R} \mid |x - y| < r\}$$

on nimeltään x :n r -ympäristö. Samoin

$$B'(x, r) = \{y \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - y| < r\} = \{y \in \mathbf{R} \mid |x - y| < r, y \neq x\} \text{ (punteerattu ympäristö)}$$

ja

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbf{R} \mid |x - y| \leq r\} \text{ (suljettu ympäristö)}.$$

Nämä ovat \mathbf{R} :n osajoukkoja. ($B' \subset B \subset \bar{B}$.)

Esimerkki. Olkoon $x = 2$ ja $r = \frac{1}{10}$.

$$y \in B(2, \frac{1}{10}) \iff 2 - \frac{1}{10} < y < 2 + \frac{1}{10}.$$

Samoin jos $x = 2$ ja $r = \frac{1}{1000}$

$$y \in B(2, \frac{1}{1000}) \iff 2 - \frac{1}{1000} < y < 2 + \frac{1}{1000} \iff y \in [2 - \frac{1}{1000}, 2 + \frac{1}{1000}].$$

Tehtävä. Kuuluuko π seuraaviin joukkoihin?

Sisältö:
 Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
 Kompleksiluvut
 Napakoordi-
 naattiesitys
 Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 15 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

- a) $B(3, \frac{1}{100})$, b) $B(3, \frac{1}{10})$
 c) $B(3, \frac{1}{2})$, d) $B(3.14, \frac{1}{100})$

Määritelmä 1.7. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Joukko A on avoin, jos jokaisella $x \in A$ on (jokin) ympäristö $B(x, r)$ joka sisältyy A :han.

Joukko $B \subset \mathbf{R}$ on suljettu, jos joukko $\mathbf{R} \setminus B = \{y \in \mathbf{R} \mid y \notin B\}$ on avoin.

Esimerkki. Suljettu väli $[a, b]$ ei ole avoin. Tarkastellaan pistettä b : ei ole olemassa mitään ympäristöä $B(b, r)$ jolle $B(b, r) \subset [a, b]$.

Esimerkki. Olkoon $x = 13$. Osoita $B(x, 1) \cap B(x, \frac{1}{5}) \cap B(x, \frac{1}{2}) := Y$ on x :n r -ympäristö jollekin $r > 0$.

Ratkaisu. Päte $B(x, \frac{1}{5}) \subset B(x, \frac{1}{2}) \subset B(x, 1)$. Siis $Y = B(x, \frac{1}{5})$ eli Y on x :n $\frac{1}{5}$ -ympäristö.

Määritelmä 8. Joukko $A \subset \mathbf{R}$ on avoin, jos $\forall x \in A$ on olemassa sellainen $r > 0$ että $B(x, r) \subset A$. Joukko $B \subset \mathbf{R}$ on suljettu, jos $\mathbf{R} \setminus B$ on avoin.

Lause 9. a) \mathbf{R} on sekä avoin että suljettu, samoin \emptyset . (Muut \mathbf{R} :n osajoukot eivät voi olla yhtä aikaa avoimia ja suljettuja. Sen sijaan on olemassa osajoukkoja, jotka eivät ole avoimia eivätkä myöskään suljettuja, esimerkiksi $[0, 1[$)

b) Avoin väli on avoin joukko, suljettu väli on suljettu joukko.

c) Äärellinen joukko on suljettu (s.o. joukko johon kuuluu vain äärellisen monta alkioita, esim $\{\frac{1}{2}, -2, \pi, \sqrt{13}\}$ on, $[0, \frac{1}{10^2}]$ ei ole äärellinen joukko.)

d) Mielivaltaisen monen avoimen joukon yhdiste on avoin joukko.

e) Äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin joukko.

Sisältö:
 Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
 Kompleksiluvut
 Napakoordi-
 naattiesitys
 Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 16 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Esimerkki. Olkoon $A_n =]\sqrt{1+n}, n^2[\quad \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Silloin A_n on avoin väli, joten se on avoin joukko. Siis

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}, n \geq 2} A_n \subset \mathbf{R}$$

on avoin.

Esimerkki. $] -1, 2[\cap] 0, 3[\cap] 0, 10[=] 0, 2[$

Esimerkki. Olkoon $n \in \mathbf{N}$, $A_n :=] 0, 1 + \frac{1}{n}[$ (avoimia joukkoja). Ja olkoon

$$B := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Väite: $B =] 0, 1[$.

Todistus. Ensiksi, osoitetaan että

$$] 0, 1[\subset \bigcap_{n=1}^{\infty}] 0, 1 + \frac{1}{n}[=: B.$$

Olkoon näet $x \in] 0, 1[$. Tällöin $x \in] 0, 1 + \frac{1}{n}[= A_n \forall n$. Siis $x \in B$, eli $] 0, 1[\subset B$.

Kääntäen, olkoon $y > 1$. Valitaan n s.e. $\frac{1}{n} < y - 1$. Tällöin $y \notin] 0, 1 + \frac{1}{n}[= A_n$. Siis $B =] 0, 1[$. Puoliavoin väli ei ole avoin joukko.

Äärettömän monen avoimen joukon leikkaus ei siten ole välttämättä avoin. □

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 17 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

1.2. Kompleksiluvut

Kompleksiluvut

\mathbf{R}^2 on lukuparien (a, b) , missä a ja b reaalityyppisiä, muodostama joukko. (Käytetään myös esitystä $(a, b) = a\bar{i} + b\bar{j}$, missä $\bar{i} = (0, 1)$ ja $\bar{j} = (1, 0)$.) Sanotaan, että (a, b) on lukupari, piste, vektori, tason alkio joukossa \mathbf{R}^2 . On määritelty vektoreiden yhteenlasku

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

ja reaalityyppisellä $r \in \mathbf{R}$ kertominen

$$r(a, b) = (ra, rb).$$

Määritellään nyt kertolasku kaavalla.

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad) \quad \text{missä } a, b, c, d \in \mathbf{R} \quad (4)$$

On mahdollista osoittaa että joukko \mathbf{R}^2 varustettuna edellä mainitulla yhteenlaskulla ja kertolaskulla (4) toteuttaa kanta-aksoomat (A1) - (A9).

Kompleksilukujen tulo (Javasketchpad-animaatio)

Merkitään: $(0, 1) = i$ ja $(a, b) = a + ib$.

Joukkoa \mathbf{R}^2 varustettuna edellä mainituilla laskutoimituksilla sanotaan kompleksilukujen joukoksi (kunnaksi), ja merkitään \mathbf{C} :llä.

Sisältö:
Reaalityyppiset
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalityyppisistä

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 18 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Kaava (4) saa muodon

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad).$$

Huom! $(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1, 0)$ eli $i^2 = ii = -1$.

Jos $a, b \in \mathbf{R}$, niin lukua $a + ib$ sanotaan kompleksiluvuksi, ja a on sen reaaliosa ja b imaginaariosa.

Määritelmä. Luku $|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ on kompleksiluvun $a + ib$ itseisarvo eli moduli.

Esimerkki. Laske seuraavien kompleksilukujen reali- ja imaginääriosat.

1. $3(2 + i) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot i = 6 + 3i$.

2. $\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5}i) = (\sqrt{2}^2) - \sqrt{2}\sqrt{5}i = 2 - \sqrt{10}i$.

3. $3i(2 + i) = 3i \cdot 2 + 3i \cdot i = 6i + 3i^2 = 6i - 3$.

4. Olkoon $x, y \in \mathbf{R}$. $(x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

5. $4i(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = 4i(\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}2i - \sqrt{2}2 - \sqrt{2}i\sqrt{2}i)$

$$= 4i(2 + 2\sqrt{2}i - 2i - 2\sqrt{2} \cdot (-1))$$

$$= 4i(2 + 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} - 2))$$

$$= 8i + 8\sqrt{2}i + 4 \cdot (-1)(2\sqrt{2} - 2)$$

$$= \underbrace{i(8 + 8\sqrt{2})}_{\text{Im-osa}} - \underbrace{8\sqrt{2} + 8}_{\text{Re-osa}}$$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 19 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

$$6. 4i^5 + 3i^3 = 4(i^2 \cdot i^2 \cdot i) + 3i^2 \cdot i = 4 \cdot (-1) \cdot (-1)i + 3 \cdot (-1) \cdot i = 4i - 3i = i$$

$$7. (i^3 + 1)(4i^4 + i^2) = (i^2 \cdot i + 1)(4 \cdot i^2 \cdot i^2 - 1) = (-i + 1)(4 - 1) = 3 - 3i$$

Olkoon $z \in \mathbf{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Merkitään $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ on moduli eli itseisarvo.

Esimerkki. $|3 - 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Esimerkki. $|i| = \sqrt{0 + 1^2} = 1$ joten $|i|^k = 1, \forall k \in \mathbf{N}$.

Olkoon $z = x + iy$ kuten yllä. z :n liittoluku määritellään $\bar{z} = x - iy$. Pätee

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - iy + iy - i^2y = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Siis, $z\bar{z} = |z|^2 \forall z \in \mathbf{C}$.

Kompleksilukujen kertolaskun tärkein motivaatio on se, että jokaisella $z = x + iy \neq 0$ on käänteisalkio z^{-1} eli $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{x + iy} = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

(Tällöin $z\bar{z}^{-1} = 1 = z^{-1}z$:

$$(x + iy) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = (x + iy)(x - iy) \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = (x^2 + y^2) \frac{1}{x^2 + y^2} = 1.)$$

Kompleksilukujen jakolasku määritellään ($z = x + iy, w = a + ib, x, y, a, b \in \mathbf{R}$)

$$\frac{z}{w} := z \cdot w^{-1} := \frac{x + iy}{a + ib} := \frac{ax + by}{a^2 + b^2} + i \frac{ay - bx}{a^2 + b^2}.$$

Sisältö:
 Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
 Kompleksiluvut
 Napakoordi-
 naattiesitys
 Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 20 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Kompleksilukujen jako (Javasketchpad-animaatio)

Esimerkkejä: Laske seuraavien kompleksilukujen reaali- ja imaginääriosat.

$$1. \frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - i\frac{1}{5} \text{ (kaava (5), } x=2, y=1\text{)}.$$

Toinen tapa: lavennetaan nimittäjän liittoluvlla

$$2-i) \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-i}{2^2-i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$$

$$\text{Moduli: } \left| \frac{1}{2+i} \right| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(Huom! Modulille pätee: Jos $z, w \in \mathbf{C}$, niin $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$. Edellä, $\left|\frac{1}{2+i}\right| = \frac{1}{|2+i|} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$)

$$2. \sqrt{2+i) \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}+1^2} = \frac{1}{3}(\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2}i - 1) = \frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{2}i) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}i.$$

$$3. 3-i) \frac{1}{3+i} + 4-i) \frac{2}{4+i} = \frac{3-i}{3^2+1^2} + \frac{8-2i}{4^2+1} = \frac{3-i}{10} + \frac{8-2i}{17} = \frac{3}{10} + \frac{8}{17} - \frac{i}{10} - \frac{2i}{17} = \frac{3}{10} + \frac{8}{17} - i\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{17}\right). \text{ Reaaliosa on } \frac{3}{10} + \frac{8}{17}, \text{ imaginääriosiosa on } \frac{1}{10} + \frac{2}{17}.$$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu



Sivu 21 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

4. Olkoon $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} & {}^{2+i}x + \frac{ix^2}{2-i} + {}^{2-i}x + \frac{ix}{2+i} \\ &= \frac{(2+i)(x+ix^2)}{2^2+1} + \frac{(2-i)(x^2+ix)}{2^2+1} \\ &= \frac{2x+ix+2ix^2-x^2}{5} + \frac{2x^2-ix^2+2ix-i^2x}{5} \\ &= \frac{1}{5}(2x+ix+i2x^2-x^2+2x^2-ix^2+2ix+x) \\ &= \frac{1}{5}(3x+x^2+i(3x+x^2)) \\ &= \underbrace{\frac{3x+x^2}{5}}_{\text{Re osa}} + i \underbrace{\frac{3x+x^2}{5}}_{\text{Im osa}}. \end{aligned}$$

Ko. luvun moduli:

$$\left| \frac{3x+x^2}{5} + i \frac{3x+x^2}{5} \right| = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{3x+x^2}{5} \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5} |3x+x^2|.$$

1.3. Napakoordinaattiesitys

Napakoordi- naattiesitys

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

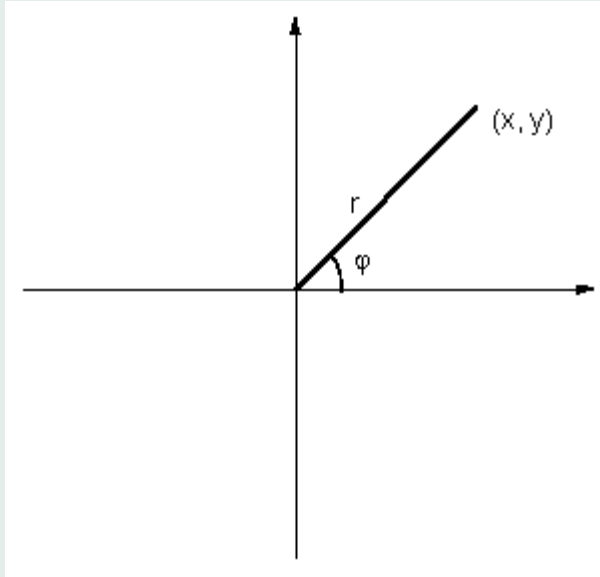
Sivu 22 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Kuva (1) havainnollistaa napakoordinaattiesitystä: $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$



Kuva 1: Napakoordinaattiesitys

Siis,

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ja } \varphi = \overline{\arctan} \frac{y}{x}.$$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordinaattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 23 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Siirrytään kompleksitasoon; z olkoon $z = x + iy$. Edeltä saadaan $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Mainitsemme ilman todistusta, että imaginääriselle exponentille pätee

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \text{ (Eulerin kaava)}$$

missä $\varphi \in [0, 2\pi]$ tai $\varphi \in \mathbf{R}$.

Kompleksiluvuille saadaan siis esitys

$$z = re^{i\varphi}, r = |z|, \varphi \text{ argumentti eli vaihekulma.}$$

Imaginaariselle exponentille pätevät tutut laskusäännöt, esim.

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}, a, b \in \mathbf{R}.$$

Olkoon $z = re^{i\varphi}, w = se^{i\theta}, \varphi, \theta \in \mathbf{R}$. Tällöin siis

$$zw = (re^{i\varphi})(se^{i\theta}) = rse^{i(\varphi+\theta)}.$$

Katso kuva (2).

Havainto:

Kompleksilukujen kertolaskussa

- vaihekulmat lasketaan yhteen
- modulit kerrotaan keskenään

Katso kuva (3).

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

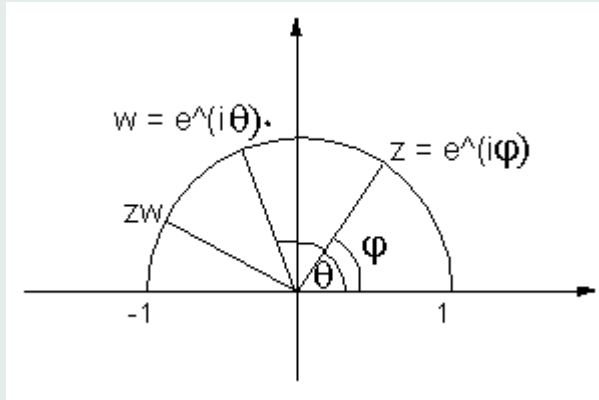
◀▶

Sivu 24 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta



Kuva 2: Napakoordinaattiesitys 2

1.4. Reaalilukujonoista

Reaalilukujonoista

Jos jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbf{N}$ kohti valitaan joku reaaliluku $x_n \in \mathbf{R}$, saadaan (reaaliluku)jono

$$(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

jota merkitään myös $(x_n)_n^\infty = 1$, tai $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. (Täsmällinen määritelmä: lukujono on kuvaus eli funktio joukosta \mathbf{N} joukkoon \mathbf{R} .)

Sisältö:
 Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
 Kompleksiluvut
 Napakoordinaattiesitys
 Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

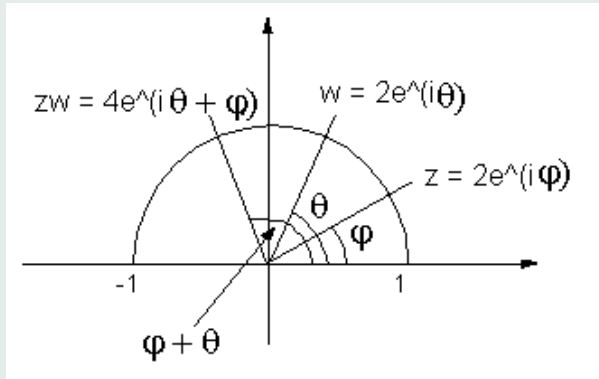
◀ ▶

Sivu 25 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta



Kuva 3: Napakoordinaattiesitys 3

Esimerkkejä: $(\frac{1}{n^2})_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots)$, $(\frac{\cos n}{\sin(n\pi)+3})_{n=1}^{\infty}$, $(n^{100} + \frac{n}{3})_{n=1}^{\infty}$.

Sanomme, että x_n on jonon n :s alkio tai n :s koordinaatti.

Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Jono

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ eli } (x_n)_{n=1}^k$$

on äärellinen lukujono. (Esim. $\mathbf{R}^2 = \{(a, b)\}$.)

Määritelmä 1.10 Jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee raja-arvoon $a \in \mathbf{R}$, jos seuraava pätee. Jokaista mielivaltaista $r > 0$ kohti voidaan löytää luku $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < r, \text{ kun } n \geq N$$

Sisältö:
 Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
 Kompleksiluvut
 Napakoordinaattiesitys
 Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 26 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow \infty} X_n = a$.

Jos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ei suppene (mihinkään reaalilukuun), se hajaantuu.

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa

$$\left(\frac{1}{n+3} + 2\right)_{n=1}^{\infty} = \left(2 + \frac{1}{4}, 2 + \frac{1}{5}, 2 + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{7}, \dots\right).$$

Näyttää suppenevan kohti lukua 2. Kuinka tämä todistetaan käyttäen määritelmää 1.10?

Olkoon $r > 0$ mielivaltainen.

1. Tarkastellaan lauseketta

$$|x_n - a|, \text{ missä } \frac{1}{n+3} + 2 = x_n \text{ ja } a = 2;$$

siis

$$|x_n - a| = \left| \frac{1}{n+3} + 2 - 2 \right| = \left| \frac{1}{n+3} \right| = \frac{1}{n+3}$$

2. Tarkastellaan milloin

$$|x_n - a| < r \text{ eli } \frac{1}{n+3} < r. \quad (6)$$

Tämä voidaan esim. käsittää epäyhtälönä n :lle, missä n voidaan ratkaista r :n avulla.

$$(6) \iff n+3 > \frac{1}{r} \iff n > \frac{1}{r} - 3.$$

Otetaan joku $N \in \mathbf{N}$ joka on suurempi kuin $\frac{1}{r} - 3$. Jos nyt $n > N$, niin

$$n > N \geq \frac{1}{r} - 3 \implies |x_n - a| < r.$$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 27 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots) = ((-1)^n)_{n=1}^\infty$. Suppeneeko tämä jono?

1. Suppeneeko jono esim. arvoon $a = 1$?

Tarkastellaan lauseketta

$$|X_n - a| = |(-1)^n - 1| = \begin{cases} |-2| = 2, & \text{jos } n \text{ pariton} \\ 0, & \text{jos } n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Oletetaan esimerkiksi $r = \frac{1}{100}$. Päteekö nyt

$$|x_n - a| < \frac{1}{100}, \forall n \geq N?$$

Mutta olipa N miten suuri tahansa, aina löytyy parittomia lukuja $n > N$ jolloin $|x_n - a| = 2$. Yllä oleva epäyhtälö ei päde $\forall n \geq \mathbf{N}$, joten jono ei suppene arvoon 1.

2. Suppeneeko jono johonkin muuhun $a \in \mathbf{R}$?

Tutkitaan jälleen lauseketta

$$|x_n - a| = |(-1)^n - a| = \begin{cases} |-1 - a|, & n \text{ pariton} \\ |1 - a|, & n \text{ parillinen} \end{cases} = \begin{cases} |1 + a|, & n \text{ pariton} \\ |1 - a|, & n \text{ parillinen} \end{cases}$$

Jompikumpi näistä on suurempi kuin 1, olipa a mikä tahansa reaalityyppi.

Jos taas esim. $r = \frac{1}{10}$, niin joko parittomille tai parillisille n

$$|x_n - a| \geq 1 > \frac{1}{10}$$

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 28 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

eli $|x_n - a| < \frac{1}{10}$ ei päde. Näin ollen jono ei suppene a :han.

Määritelmä 1.11 Olkoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono. Tämä jono on

- a) nouseva, jos $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$
- b) laskeva, jos $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$
- c) aidosti nouseva, jos $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$
aidosti laskeva, jos $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

Jono on monotoninen, jos se on joko nouseva tai laskeva.

Olkoon $N \in \mathbf{N}$. Jono (a_n) on

- d) nouseva indeksistä N alkaen, jos $a_N \leq a_{N+1} \leq a_{N+2} \leq \dots$
- e) laskeva indeksistä N alkaen, jos $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq \dots$

Tässä ei siis ole merkitystä sillä, miten ensimmäiset jonon alkioit käyttäytyvät.

Lause 1.12 Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nouseva jono indeksistä N alkaen. Jos on olemassa $M \in \mathbf{R}$ s.e.

$$x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (7)$$

niin jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee, ja raja-arvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin M .

Esimerkki. Tarkastellaan jonoa $(3, 3.3, 3.14, 3, 141, 3.1415, 3.14159, \dots)$; jonon alkio x_n on π :n arvo katkaistuna n :nen desimaalin kohdalta. Silloin $x_n \in \mathbf{Q}$. Edellä Lausessa

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀▶

◀▶

Sivu 29 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

1.12 voidaan ottaa esim. $M = 4$. Näin ollen raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}.$$

Esimerkki. Tarkastellaan lukujonoa

$$(X_n)_{n=1}^{\infty} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

missä a on jokin kiinteä reaaliluku.

Voidaan osoittaa, että (X_n) on ylhäältä rajoitettu (eli (6) pätee) ja lisäksi nouseva, kun $n > |a|$. Lauseen 1.12 nojalla jonolla \exists raja-arvo.

Tapauksella $a = 1$ merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \text{ (Neperin luku)}$$

Todistuksessa käytetään Bernoullin epäyhtälöä:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na, \text{ kun } a > -1, n \in \mathbf{N}.$$

Todistus. Todistus induktiolla:

1° $n = 1$ (1.4) $\iff 1 + a \geq 1 + a$ tosi.

2° Induktio-oletus: (1.4) pätee arvolla n . Osoitetaan, että se pätee arvolla $n + 1$.

$$(1 + a)^{n+1} \geq (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + an)(1 + a) \geq 1 + \underbrace{an + a}_{(n+1)a} + \underbrace{a^2 n}_{\geq 0} \geq 1 + (n + 1)a.$$

□

Sisältö:
Reaaliluvut
 \mathbf{R} :n topologiaa
Kompleksiluvut
Napakoordi-
naattiesitys
Reaalilukujonoista

Etusivu

◀ ▶

◀ ▶

Sivu 30 / 30

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta