Sisältö

2 Reaalimuuttujan funktiot

Olkoot A, B $\mathbf{R} : n$ tai $\mathbf{C} : n$ osajoukkoja. Jos jokaista joukon A pistettä x vastaa tietty B:n piste y, sanotaan että on määritelty funktio eli kuvaus $f : A \to B$.

Määritelmä. Sanomme että y on alkion x kuva, merkitään myos $f(x)$. A on kuvauksen f lähtöjoukko, B maalijoukko.

Jos on annettu osajoukko $A_1 \subset A$, niin merkitään

$$f(A_1) = \left\{ y \in B \;\middle|\; \exists x \in A_1 \text{ s.e. } y = f(x) \right\}$$

Esimerkki. $A = \,]-2, 5[$, $B = [-100, 100]$, $f(x) = x^2 + 1$, $f = A \to B$. Olkoon $A_1 = [0, 1]$. Silloin A_1:n kuva $f(A_1) = [1, 2]$.

Määritelmä. Jos A, B, f kuten yllä, $y \in B$ ja x toteuttaa $f(x) = y$, niin x on y:n (eräs) alkukuva.

Funktiolla on aina se ominaisuus, että jokaisella lähtojoukon alkiolla on täsmälleen yksi kuva; maalijoukon alkiolla voi olla $0, 1$ tai useampia alkukuvia.

Esimerkki. $A = \,]-2, 5[$, $B = [-100, 100]$, $f(x) = x^2 + 1$. Joukon B alkiolla 2 on kaksi alkukuvaa: 1 ja -1. Alkiolla 72.83 ei ole alkukuvia joukossa A.

Jos $B_1 \subset B$, $(A, B, f$ kuten edellä) on joukko

$$f^{-1}(B_1) = \left\{ x \in A \;\middle|\; f(x) \in B_1 \right\}$$

B_1:n alkukuva.

- Jos kuvaukselle f pätee $f(A) = B$, niin f on surjektio (A:sta B:lle).
- Jos kuvaukselle f pätee: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, niin f on injektio (tässä $x_1, x_2, \in A$ mielivaltaisia).
- Jos f on sekä surjektio että injektio, niin se on bijektio.

Esimerkki. $f(x) := x^2 + 1$.

ei ole injektio eikä surjektio kun $A = \,]-2, 5[$, $B = [-100, 100]$

ei ole injektio, on surjektio kun $A = \,]-2, 5[$, $B = [1, 26[$

on injektio, ei ole surjektio kun $A = \,]0, 5[$, $B = [-100, 100]$

on injektio ja surjektio kun $A =]0,5[$, $B =]1,26[$

Esimerkki. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Identtinen kuvaus $f(x) = x$ on bijektio $f : A \to A$.

Määritelmä. Olkoon $f : A \to B$ ja $A_1 \subset A$. Kuvaus $g : A_1 \to B$ joka määritellään kaavalla $g(x) = f(x) \quad \forall x \in A_1$ on nimeltään f:n rajoittuma joukkoon A_1. Merkitään $g = f|_{A_1}$.

Huomautus! Kaksi kuvausta $f : A \to B$ ja $g : C \to D$ ovat samat jos

1. $A = C$
2. $B = D$
3. $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$

Esimerkki. Olkoon $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Jos muuta ei ole sanottu, niin maalijoukko on $\mathbf{R}$, ja lähtöjoukko mahdollisimman suuri joukko, jossa lauseke on määritelty, tässä $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

2.1 Polynomit

Polynomi on funktio $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ joka on muotoa

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

missä $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ovat vakioita (polynomin kertomia). Polynomi voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Jos $a_n \neq 0$, on P:n asteluku n. Jos $a_n = 0 \quad \forall n$, niin sanomme, että P on $0-$ polynomi.

Lause 2.1. (Jakoyhtälö) Olkoot P ja Q polynomeja, Q ei 0-polynomi. Tällöin on olemassa polynomit A ja R, joille

$$P = AQ + R,$$

missä R:n aste on alempi kuin Q:n aste, tai R on $0-$ polynomi. Polynomit A ja R ovat yksikäsitteiset.

Todistus. Tarkastellaan joukkoa

$$\mathcal{E} := \left\{ P - AQ \;\middle|\; A \text{ on polynomi } \right\}$$

Siis, $\mathcal{E}$ on polynomeista koostuva joukko; siihen kuuluvat ne polynomit jotka ovat muotoa $P - AQ$, missä A on polynomi.

Jos 0-polynomi kuuluu joukkoos $\mathcal{E}$, niin siis olemassa A s.e. $Q = P - AQ$ eli $P = AQ$. Tällöin voidaan valita $R = 0$ ja lause on todistettu.

Muussa tapauksessa olkoon R joukon $\mathcal{E}$ alinta astetta oleva polynomi; olkoon A_0 vastaava A. Siis, $R = P - A_0 Q$ eli $P = A_0 Q + R$.

Väite. R:n asteluku n on pienempi kuin Q:n asteluku m.

Jos pätee $n \geq m$, merkitään

$$\begin{aligned} R &= r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \ldots + r_0 \\ Q &= q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \ldots + q_0 \end{aligned}$$

tällöin

$$R - \frac{r_n}{q_m} x^{n-m} Q = P - (A_0 + \frac{r_n}{q_m} x^{n-m}) Q \in \mathcal{E}$$

Toisaalta,

$$\begin{aligned} R - \tfrac{r_n}{q_m} x^{n-m} Q &= r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \ldots + r_0 \underbrace{- \frac{r_n}{q_m} x^{n-m}(q_m x^m}_{-r_n x^n + \ldots x^{n-1} + \ldots} + \ldots + q_0) \\ &= \ldots x^{n-1} + \ldots x^{n-2} + \ldots \end{aligned}$$

eli n:s aste supistuu pois!

Yhteenvetona, polynomi

$$R - \frac{r_n}{q_m} x^{n-m} Q$$

1) kuuluu joukkoon $\mathcal{E}$

2) on enintään astetta $n - 1$.

Tämä on ristiriita, koska R;n aste on n; pätee $m > n$. $\square$

Käytännössä A ja R löydetään jakokulman avulla.

$$P = x^3 + x^2 + x + 1, \quad Q = x^2 + 1$$

Jaetaan jakokulmassa $x^3 + x^2 + x + 1$ polynomilla $x^2 + 1$, saadaan $x + 1$. Tällöin $A = x + 1$, $R = 0$.

Esimerkki. $P = x^3 + 3x^2 - x - 1$, $Q = x + 2$. Jaetaan jakokulmassa $x^3 + 3x^2 - x - 1$ polynomilla $x + 2$, saadaan $x^2 + x - 3$ ja jakojäännökseksi 5. Siis, $A = x^2 + x - 3$ ja $R = 5$. Voidaan tarkistaa laskemalla, että

$$QA + R = (x + 2)(x^2 + x - 3) + 5 = x^3 + 3x^2 - x - 1 = P.$$

Olkoon P polynomi ja olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$. Jakoyhtälön avulla voidaan kirjoittaa

$$P(x) = (x - x_0)A + R, \tag{1}$$

missä $Q = x - x_0$, Q:n aste $\deg(Q) = 1$, ja siten $\deg(R) = 0$. Siis R on vakio (mahdollisesti jopa 0).

Oletetaan, että x_0 on polynomin P:n 0-kohta, $P(x_0) = 0$. Silloin (1) $\Rightarrow$

$$P(x_0) = (x_0 - x)A(x_0) + R(x_0) \iff 0 = R(x_0)$$

(syötetään (1):ssä x:n paikalle x_0). Koska R on vakio ja $R(x_0) = 0$, niin R on 0-polynomi.

Lause 2.2. Jos polynomilla P on 0-kohta x_0, niin se voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = (x - x_0)A(x)$$

missä A on polynomi jolle deg(A) = deg(P) -1 .

Lause 2.3. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Jos n:n asteen polynomilla P on 0-kohdat $x_1, \ldots, x_n$ niin P voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \quad \Big(=: a_n \Pi_{j=1}^{n}(x - x_j)\Big).$$

(Tässä a_n on P:n korkeimman asteen termin kerroin.)

Todistus. Seuraa lauseesta 2.2 (sivu 5). □

Seuraus 2.4. n:n asteen polynomilla on enintään n kpl eri 0-kohtia.

Todistus. Jos 0-kohtia m kpl, missä $m > n$, niin lauseesta 2.3 (sivu 5) seuraa

$$P(x) = a_n \Pi_{j=1}^{m}(x - x_1) = \underbrace{a_n}_{\neq 0} x^m + x^{m-1} + \ldots$$

eli P olisi m:n asteen polynomi, Ristiriita. □

Määritelmä. Jos polynomi P voidaan esittää muodossa

$$P(x) = (x - x_0)^m Q(x),$$

missä Q on polynomi, $m \in \mathbf{N}$, niin x_0 on P:n m:n kertaluvun 0-kohta.

Esimerkki. Olkoon $P(x) = x^4$. Piste $x_0 = 0$ on P:n 4. kertaluvun 0-kohta.

Esimerkki. Olkoon $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$. Piste $x_0 = 1$ on 3. kertaluvun 0-kohta.

Lause 2.5. Olkoon P polynomi, jolle $\deg(P) = n$. Oletetaan, että P:llä on pisteissä $a_1, a_2, \ldots, a_M$ 0-kohdat ja että 0-kohdan a_j kertaluku on m_j.

Oletetaan että $m_1 + m_2 + \ldots + m_M = n = \deg(P)$. Silloin polynomi P voidaan esittää muodossa

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_M)^{m_M}.$$

Emme todista tätä lausetta tässä.

2.2 Algebrallisista yhtälöistä

Tarkastellaan yhtälöitä, jotka ovat muotoa

$$P(x) = 0, \tag{2}$$

missä P on polynomi. 1. Jos $\deg(P) = 1$, niin (2) on muotoa

$$ax + b = 0,$$

missä a ja b ovat vakioita. Tällä on 1-käsitteinen ratkaisu $x = -\frac{b}{a}$.
2. Olkoon $\deg(P) = 2$. Silloin (2) on muotoa

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{3}$$

missä a, b, c annettuja reaalilukuja.

a) Jos $b^2 - 4ac \geq 0$, niin (3):n ratkaisu on

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos $b^2 - 4ac = 0$, on vain yksi ratkaisu $x = -\frac{b}{2a}$, joka on siis P:n 2-kertainen 0-kohta.

b) Jos $b^2 - 4ac < 0$, niin (3):llä ei ole reaalisia ratkaisuja. Kompleksiset ratkaisut ovat

$$x = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Ne ovat toistensa liittolukuja.

Esimerkki. Tarkastellaan yhtälöä $ax^4 + cx^2 + f = 0$. Kirjoitetaan $x^2 = z$, $x = \pm\sqrt{z}$. Ratkaisu on

$$z = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4af}}{2a},$$

joten alkuperäisen yhtälön ratkaisu on

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4af}}{2a}},$$

kun neliöjuurien alla olevat lausekkeet ovat positiivisia.

Esimerkki. Kolmannen asteen yhtälö

$$z^3 + pz + q = 0. \tag{4}$$

missä p, $q \in \mathbf{R}$, ratkaistaan Cardanon kaavalla.

Cardanon kaavat antavat yleisen 3:nnen asteen yhtälön algebrallisen ratkaisun:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
z_2 &= \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
z_3 &= \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Lauseketta $D := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ sanotaan diskriminantiksi. Erotetaan kolme tapausta:

1. $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} > 0 \Rightarrow$ (4):llä on 1 reaaliarvoinen ratkaisu, 2 kompleksista ratkaisua, jotka ovat toistensa liittolukuja.

2. $D = 0$. Ratkaisut ovat

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\sqrt[3]{-q/2} \\
z_2 &= z_3 = -\sqrt[3]{-q/2},
\end{aligned}$$

3. $D < 0$, 3 reaalista ratkaisua.

2.3 Rationaalifunktiot

Rationaalifunktio R on funktio, joka voidaan esittää muodossa

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

missä P, Q polynomeja ja $x \in \mathbf{R}$, se on määritelty niille x, joille $Q(x) \neq 0$.

Määritelmä. Jos x_0 on Q:n nollakohta ja $P(x_0) \neq 0$, niin x_0 on R:n napa.

Rationaalifunktion jakaminen osamurtolukuihin

Erotetaan 4 erilaista tapausta.

Tapaus 1. Olkoon R rationaalifunktio, $R = \frac{P}{Q}$, deg $P \geq$ deg Q. Haluamme kirjoittaa sen muodossa

$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q} \tag{5}$$

missä P_1, P_2 polynomeja joille deg $(P_2) <$ deg (Q). Mutta tämä seuraa jakoyhtälöstä Lause 2.1 (sivu 3).

$$\exists\ A, S \text{ s.e.} \quad P = AQ + S,\ \deg S < \deg Q \Rightarrow R = \frac{AQ+S}{Q} = A + \frac{S}{Q}.$$

saamme esityksen (5) valitsemalla $P_1 = A$, $P_2 = S$.

Esimerkki.

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^2}{x-1} \quad (P(x) = x^2, \quad Q(x) = x-1) \\ &= \frac{x^2+1-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \underbrace{x+1}_{P_1} + \underbrace{\frac{a}{x-1}}_{P_2}. \end{aligned}$$

Seuraavassa tarkastellaan rationaalifunktioita, joilla deg$(P) <$ deg(Q) $(R = P/Q)$.

Tapaus 2. Oletetaan, että deg $(Q) = n$ ja Q:lla on keskenään erisuuret 0-kohdat $x_1, \ldots x_n$. Tällöin $R = \dfrac{P}{Q}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{P}{a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \quad \in \mathbf{R} \\ &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n} \end{aligned}$$

missä $A_1, \ldots, A_n$ ovat vakioita.

(**Huomautus.** Tämän jälkeen funktion R integrointi on helppoa, sillä

$$\int \frac{A}{x-x_1} = A \log(x - x_1).)$$

Todistetaan väite tapauksessa $n = 2$. Silloin

$$R(x) = \frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}, \quad x_1 \neq x_2$$

halutaan esittää muodossa

$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2},$$

missä $A_1, A_2 \in \mathbf{R}$.

Kirjoitetaan

$$\frac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} \quad \Big| \cdot (x-x_1)(x-x_2)$$

minkä tulisi päteä kaikilla $x \in \mathbf{R}$!

Tästä on määrättävä luvut A_1, A_2. Poistetaan nimittäjät $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & ax+b = A_1(x-x_2) + A_2(x-x_1) \\ \iff \quad & ax+b = (A_1+A_2)x - A_1x_2 - A_2x_1 \end{aligned}$$

Tämän tulee päteä kaikille $x \in \mathbf{R}$, joten

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a &= A_1 + A_2 \\ b &= -A_1x_2 - A_2x_1 \end{cases} \\ \iff \quad & \begin{cases} a &= A_1 + A_2 \\ -b &= A_1x_2 + A_2x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Saimme siis yhtälöparin tuntemattomille A_1 ja A_2. Tämän yhtälöparin determinantti on

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 \neq 0.$$

Siten A_1 ja A_2 voidaan aina ratkaista.□

Esimerkki 1. Seuraava menetelmä ei perustu yllä olevaan todistukseen. Määritämme vakiot A_1, A_2, A_3 siten että

$$R(x) := \frac{1}{\underbrace{x(x-1)(x+1)}} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}, \tag{6}$$

missä

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$

on annettu rationaalifunktio, deg $P = 0$, deg $Q = 3$, ja Q:lla on 0-kohdat $0, 1$ ja -1.

Ratkaisu.

1. Kerrotaan (6) puolittain "1. nimittäjällä" x

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = A_1 + x\frac{A_2}{x-1} + x\frac{A_3}{x+1}.$$

2. Asetetaan $x = 0$ (Q:n vastaava 0-kohta)

$$\frac{1}{(0-1)(0+1)} = A_1 + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots \quad \Longleftrightarrow A_1 = -1.$$

3. Sijoitetaan (6):een $A_1 = -1$ ja kerrotaan "2:lla nimittäjällä" $x - 1$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x}(x-1) + A_2 + \frac{A_3}{(x+1)}(x-1).$$

4. Sijoitetaan $x = 1$ ("Q:n 2. 0-kohta")

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 0 + A_2 + 0 \Longrightarrow A_2 = \frac{1}{2}.$$

5. Sijoitetaan (6):een $A_2 = \frac{1}{2}$; kerrotaan (6) "3. nimittäjällä" $x + 1$

$$\frac{1}{x(x-1)} = (x+1)\frac{-1}{x} + (x+1)\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + A_3.$$

6. Sijoitetaan $x = -1$.

$$\frac{1}{-1 \cdot (-2)} = A_3 \Longrightarrow A_3 = \frac{1}{2}.$$

Vastaus:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1},$$

joka pätee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ poislukien nimittäjän nollakohdat. Edelleen

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + C = \frac{1}{2}\log\frac{|x^2-1|}{x^2} + C.$$

Esimerkki 2. Määrää A_1, A_2, A_3 ja A_4 siten, että

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-3)} + \frac{A_4}{(x-4)}. \quad (7)$$

1° A_1: kerrotaan $x-1$:lla:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-2)(x-3)(x-4)} &= A_1 + (x-1)(\ldots) \quad (\text{sijoitetaan } x = 1 \Rightarrow) \\
\frac{1}{(1-2)(1-3)(1-4)} &= A_1 \Longrightarrow A_1 = \tfrac{-1}{2\cdot 3} = -\tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

2° A_2: kerrotaan (7) $x-2$:lla

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x-3)(x-4)} &= A_2 + (x-2)(\ldots) \quad (\text{sijoitetaan } x = 2 \Rightarrow) \\
\frac{1}{1\cdot(-1)\cdot(-2)} &= A_2 \Longrightarrow A_2 = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

3° A_3: kerrotaan (7) $x-3$:lla

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)} &= A_3 + (x-3)(\ldots) \quad (\text{sijoitetaan } x = 3 \Rightarrow) \\
\frac{1}{2\cdot 1\cdot(-1)} &= A_3 \Longrightarrow A_3 = -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

4° A_4: kerrotaan (7) $x-4$:lla

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= A_4 + (x-4)(\ldots) \quad (\text{sijoitetaan } x = 4 \Rightarrow) \\
\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1} &= A_4 \Longrightarrow A_4 = \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

Siis,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{6}\frac{1}{x-4}$$

$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1,2,3,4\}$.

Tapaus 3. Jos Q jakautuu reaalisiin 1. asteen tekijöihin, joiden joukossa on moninkertaisia, on näitä vastaamaan asetettava niin monta osamurtolukua kuin k.o. tekijän kertaluku osoittaa.

Esimerkki 1. Olkoon
$$R(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}.$$
Tällä on kaksinkertainen 0-kohta 0 ja yksinkertainen 0-kohta 1.

Huom! Tätä ei voida kirjoittaa muotoon
$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}.$$
Voidaan kuitenkin löytää vakiot A_1, A_2, A_3 siten, että
$$R(x) = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1}$$
eli
$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \tag{8}$$
1. A_3: kerrotaan (8) $x-1$:llä
$$\frac{1}{x^2} = (x-1)\frac{A_1}{x^2} + (x-1)\frac{A_2}{x} + A_3$$
sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_3 = 1$.

2. A_1: kerrotaan (8) x^2:llä
$$\frac{1}{x-1} = A_1 + \frac{x^2 \cdot A_2}{x} + x^2\frac{A_3}{x-1}$$
sijoitetaan $x = 0$, saadaan $A_1 = -1$.

3. A_2:
$$\begin{aligned}
(8) \quad &\iff \quad \frac{1}{x^2(x-1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \\
&\iff \quad \frac{1+x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \\
&\iff \quad \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1}.
\end{aligned}$$
Kerrotaan tämä x:llä:
$$\frac{1}{x-1} = A_2 + x\frac{A_3}{x-1}.$$
Sijoitetaan $x = 0$, saadaan $A_2 = -1$.

Vastaus:
$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \qquad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}.$$

Tarkistus:
$$
\begin{aligned}
& -{}^{x-1)}\frac{1}{x^2} - {}^{x(x-1))}\frac{1}{x} + {}^{x^2)}\frac{1}{x-1} \\
= \quad & -\frac{x-1}{x^2(x-1)} - \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{x^2}{x^2(x-1)} \\
= \quad & \frac{-x+1-x^2+x+x^2}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)}
\end{aligned}
$$

Esimerkki 2. Etsi luvut $A_1, \ldots, A_5$ siten että
$$\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x+2)^2} + \frac{A_5}{x+2}. \tag{9}$$

1. A_1: (9) kerrotaan $(x-1)^3$:lla
$$\frac{1}{(x+2)^2} = A_1 + (x-1)(\ldots)$$
sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_1 = \frac{1}{9}$.

2. A_2: Siirretään (9):ssä termi $\frac{A_1}{(x-1)^3}$ vasemmalle puolelle ja sievennetään
$$
\begin{aligned}
{}^{9)}\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} - {}^{(x+2)^2)}\frac{1}{9}\frac{1}{(x-1)^3} &= \frac{9-(x+2)^2}{9(x-1)^3(x+2)^2} \\
= \frac{-x^2-4x+5}{9(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{-(x-1)(x+5)}{9(x-1)^3(x+2)^2} &= \frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2}
\end{aligned}
$$
Yhtälö (9) saadaan siis muotoon
$$\frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + A_3 \ldots$$
kerrotaan $(x-1)^2$:lla
$$\frac{-x-5}{9(x+2)^2} = A_2 + (x-1)(\ldots)$$
sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_2 = \frac{-2}{27}$.

3. A_3: Tarkastellaan yhtälöä (9). Siirretään A_1- ja A_2-termit vasemmalle puolelle ja sievennetään

$$
\begin{aligned}
{}^{3)}\frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2} \overset{(x+2)^2)}{+} \frac{2}{27}\frac{1}{(x-1)^2} &= \frac{3(x+5)-2(x+2)^2}{27(x-1)^2(x+2)^2} \\
= \frac{2(x-1)(x+\frac{2}{7})}{27(x-1)^2(x+2)^2} &= \frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x-1)(x+2)^2}.
\end{aligned}
$$

Siis (9) pätee $\iff$

$$\frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A_3}{x-1} + A_4(\ldots)$$

kerrotaan $(x-1)^2$:lla

$$\frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x+2)^2} = A_3 + (x-1)\ldots$$

sijoitetaan $x=1$, saadaan $A_3 = \frac{2}{27}\frac{\frac{9}{2}}{3^2} = \frac{1}{27}$.

4. A_4: (9) kerrotaan $(x+2)^2$:lla

$$\frac{1}{(x-1)^3} = A_4 + (x+2)(\ldots)$$

sijoitetaan $x=-2$, saadaan $A_4 = \frac{-1}{27}$.

5. A_5: Siirretään (9):ssä A_4-termi vasemmalle puolelle. Tarkastellaan vasenta puolta. (Huom! A_1, A_2, A_3, A_5-termit ovat oikealla puolella.)

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} + \frac{1}{27}\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{27+(x-1)^3}{27(x-1)^3(x+2)^2}. \tag{10}$$

Tässä

$$27-(x-1)^3 = 27+x^3-3x^3+3x-1 = x^3-3x^2+3x+26 = 0$$

Tämä toteutuu kun $x=-2$. Jaetaan polynomi $x^3-3x^2+3x+26$ polynomilla $x+2$, saadaan $x^2-5x+13$.

$$(10) = \frac{x^2-5x+13}{27(x-1)^3(x+2)} = \frac{A_5}{x+2} + \ldots$$

kerrotaan $x+2$:lla ja sijoitetaan $x=-2$, saadaan $A_5 = -\frac{1}{27}$.

Tapaus 4. Jos Q sisältää tekijän $x^2 + px + q$, missä p, q ovat reaalisia kertoimia ja ko. tekijän 0 -kohdat eivät ole reaalisia, on sitä kohti muodostettava osamurtoluku

$$\frac{A_1 x + A_2}{x^2 + px + q}, \quad A_1, A_2 \in \mathbf{R} \text{ ovat vakioita.}$$

Esimerkki. Kirjoitetaan

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 x + A_3}{x^2+1} \tag{11}$$

missä vakiot A_1, A_2, A_3 halutaan saada sellaisiksi että (11) toteutuu kaikilla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

1.A_1: kerrotaan (11) polynomilla x.

$$\frac{1}{x^2+1} = A_1 + x\frac{A_2 x + A_3}{x^2+1}.$$

Sijoitetaan $x = 0$, saadaan $A_1 = 1$

2. Loput kertoimet ratkaistaan (11):stä sijoittamalla $A_1 = 1$. Saadaan

$$\frac{A_2 x + A_3}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)} - {}^{x^2+1)} \frac{1}{x} = \frac{1-(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{-x}{x^2+1}$$

kerrotaan $x^2 + 1$:llä, saadaan

$$A_2 x + A_3 = -x.$$

Koska tämän täytyy päteä kaikilla $x \in \mathbf{R}$, saadaan $A_2 = -1$ ja $A_3 = 0$.

Yhteenveto tapauksista 1-4. Rationaalifunktio $R = \frac{P}{Q}$ missä Q on tulo muotoa

$$(x-a)^n \quad \text{ja} \quad x^2 + px + q \quad (p^2 - 4q < 0)$$

olevista tekijöistä, voidaan kirjoittaa summana muotoa

$$\frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{ja} \quad \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$$

olevista termeistä.

2.4 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja olkoon f reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty jossain a:n punkteeratussa ympäristössä

$$B'(a,r) := B(a,r) \setminus \{a\}$$

$(B(a,r) = \{y \in \mathbf{R} \;\big|\; |y-a| < r\})$. Tässä $r > 0$.

Määritelmä 2.6 Funktiolla f on pisteessä a raja-arvo b, jos jokaista lukua $s > 0$ kohti voidaan löytää sellainen luku $r > 0$ että

$$|f(x) - b| < s \tag{12}$$

kaikille x, jotka toteuttavat $|x-a| < r$.Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Ajattelutapa: f:n raja-arvo on b, jos "$f(x)$ on lähellä b:tä"kunhan "x on riittävän lähellä a:ta".

Esimerkki 1.

Olkoon $f(x) = 18\ \forall x \in \mathbf{R}$ ja olkoon $a = -7$. Osoita , että

$$\lim_{x \to -7} f(x) = 18.$$

Ratkaisu. Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Tarkastellaan lauseketta

$$|f(x) - b| = |18 - 18| = 0.$$

Tämä on kaikille $x \in \mathbf{R}$ pienempi kuin s (koska $s > 0$). Valitaan esimerkiksi $r = 1$. Jos $|x - (-7)| < r$, niin $|f(x) - 18| < s$.

Esimerkki 2. Olkoon $f(x) = x^2$, $a = 10$. Osoita, että

$$\lim_{x \to 10} f(x) = 100,$$

kun $s > 0$ on annettu.

Todistus. 1. Tarkastellaan lauseketta

$$\begin{aligned} |f(x) - 100| &= |x^2 - 100| = |x^2 - 10^2| \\ &= |(x-10)(x+10)| = |x-10||x+10| \end{aligned} \tag{13}$$

Yleensä pyritään kirjoittamaan/arvioimaan ylhäältä lauseketta

$$|f(x) - 100|$$

muodossa

$$|x-10| \cdot \text{jotakin}.$$

2. Merkitään "jotakin"$= A(X)$. Käyttäen tietoa, että x on lähellä pistettä a (voidaan esimerkiksi aina olettaa että $|x-a| < 1$) pyritään löytämään yläraja M lausekkeelle $A(x)$. Nyt

$$A(x) = |x+10|.$$

Pätee myös

$$|x-a| = |x-10| < 1.$$

Näin ollen $x \in]9, 11[$, joten $A(x) \leq 30$ (yhtä hyvin 100, 500, tms.). Oletetaan $M = 30$.

3. Valitaan

$$r = \frac{s}{M+1} \left(\text{tai } r = \frac{s}{M+1000}, r = \frac{s}{10M+10^6} \dots \right)$$

4. Todetaan että Määritelmä 2.6 (sivu 16) toteutuu: Jos $|x-10| < r$, niin

$$\begin{aligned} |f(x)-100| &< |x-10||x+10| \\ &< r \cdot M = \tfrac{s}{r+1} \cdot M = s \underbrace{\frac{M}{M+1}}_{<1} < s, \end{aligned}$$

kohdan (13) perusteella $|f(x)-100| < s$. $\square$

Esimerkki 3. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \text{ on rationaalinen} \\ 0, & x \text{ on irrationaalinen.} \end{cases}$$

Väite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Todistus. Olkoon $s > 0$.

1. Tarkastellaan lauseketta

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \begin{cases} |x|^3, & \text{kun } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}.$$

Siis aina

$$|f(x)-0| \leq |x^3| = |x||x|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

2. Tämä on muotoa $|x-0|\cdot A(x)$, missä $A(x)=|x|^2$. Jos esim. $|x-0|<1$, niin $|A(x)|<10=:M$.

3. Valitaan $r:=\min\left(\frac{s}{M+1},1\right)$.

4. Näytetään, että Määritelmä 2.6 (sivu 16) pätee: Jos $|x-0|<r$, niin

$$|f(x)-0|\leq |x|^3=|x|\cdot A(x)<r\cdot M\leq \frac{s}{M+1}\cdot M=s\frac{M}{M+1}<s$$

□

Lause 2.7 Jos funktiolla f on raja-arvo pisteessä a, niin silloin kaikille $s>0$ voidaan löytää $r>0$ siten, että

$$|f(x)-f(y)|<s,\quad \text{kun } |x-a|<r \text{ ja } |y-a|<r. \tag{14}$$

Tätä lausetta voidaan käyttää, kun osoitetaan, että funktiolla ei ole raja-arvoa jossakin pisteessä.

Esimerkki. Määritellään

$$f(x)=\begin{cases}3, & \text{kun } x>10\\ 1, & \text{kun } x\leq 10\end{cases}.$$

Väite: f:llä ei ole raja-arvoa pisteessä $x=10$.

Todistus. Olkoon $s=\frac{1}{2}$ ja $r>0$. Valitaan x siten, että

$$10-r<x<10,$$

mistä seuraa

$$|x-10|<r.$$

Ja y siten, että

$$10<y<10+r,$$

mistä seuraa

$$|y-10|<r.$$

Nyt

$$|f(x)-f(y)|=|1-3|=2>s.$$

Näin ollen Lause 2.7 (sivu 18) ei toteudu; ei ole raja-arvoa. □

Kun halutaan osoittaa määritelmän 2.6. avulla, että

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,$$

niin tutkitaan lauseketta $|f(x) - b|$ ja pyritään estimoimaan sitä (kun $x \approx a$, esim. $x \in]a-1, a+1]$ eli $|x-a| < 1$) lausekkeella

$$|x-a| \cdot \text{jotakin}$$

missä "jotakin"on rajoitettu ($\leq M$, ei riipu x:stä).

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = x^3 - 10\pi x$. Osoita, että

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 27 - 30\pi.$$

Pätee

$$\begin{aligned}
|f(x) - (27 - 30\pi)| &= |\underbrace{x^3 - 10\pi x}_{f} - \underbrace{(27 - 30\pi)}_{\text{raja-arvo}}| \\
&= |\underbrace{x^3 - 3^3} - \underbrace{10\pi x + 30\pi}| \\
(\triangle\text{-ey}) \quad &\leq |x^3 - 3^3| + |-10\pi x + 30\pi| \\
&= |(x-3)(x^2 + 3x + 5)| + |\underbrace{-10\pi x + 10\pi \cdot 3}_{10\pi(3-x)}| \\
&\leq |x-3||x^2 + 3x + 5| + 10\pi|3 - x| \\
&= |x-3| \underbrace{\Big(|x^2 + 3x + 5| + 10\pi\Big)}_{=:A(x)}.
\end{aligned}$$

Arvioidaan lauseketta $A(x)$ kun x on lähellä tarkastelupistettä, esimerkiksi kun

$$|x-3| < 1 \text{ eli } x \in]2, 4[\,.$$

Tällöin

$$A(x) \leq |x^2| + |3x| + |5| + 10\pi \leq 16 + 12 + 5 + 10\pi \leq 100.$$

Olkoon $s > 0$. Valitaan $r = \min\left(\frac{s}{100}, 1\right)$. Silloin

$$|f(x) - b| = |f(x) - (27 - 30\pi)| \leq |x-3| \cdot 100 < r \cdot 100 \leq \frac{s}{100} \cdot 100 = s,$$

jos $|x-3| < r$.

Esimerkki 2. Osoita

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{4}.$$

Pätee

$$\left|\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{4-x+1}{4(x-1)}\right|=\left|\frac{5-x}{4(x-1)}\right|=|x-5|\cdot\underbrace{\frac{1}{|4(x-1)|}}_{=:A(x)}$$

Oletetaan, että $x\in B(5,1)=]4,6]$. Estimoidaan $A(x)$:ää:

$$A(x)=\frac{1}{|4(x-1)|}\leq\frac{1}{4\cdot 3}<1.$$

Olkoon $s>0$. Siis:

$$|f(x)-\frac{1}{4}|<s,$$

kun valitaan $r=s$ ja $|x-5|<r$.

Esimerkki 3. Olkoon $f(x)=\pi x^3+\frac{x}{2}+\frac{1}{x+2}$. Osoita, että

$$\lim_{x\to -1}f(x)=-\pi+\frac{1}{2}.$$

Estimoidaan:

$$\begin{aligned}
|f(x)-(-\pi+\tfrac{1}{2})| &= \pi x^3+\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{x+2}-(-\pi-\tfrac{1}{2}+1)| \\
&= |\pi x^3+\pi+\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{x+2}-1| \\
&\leq |\pi x^3+\pi|+|\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}|+|\tfrac{1}{x+2}-1| \\
&= \pi|x^3+1|+\tfrac{1}{2}|x+1|+|\tfrac{1-(x+2)}{x+2}| \\
&= \pi|x+1||x^2-x+1|+\tfrac{1}{2}|x+1|+|x+1|\tfrac{1}{|x+2|} \\
&= |x+1|\underbrace{(\pi|x^2-x+1|+\frac{1}{2}+\frac{1}{|x+2|})}_{=:A(x)}
\end{aligned}$$

Oletetaan, että

$$|x-(-1)|=|x+1|<1/2$$

eli $x\in B(-1,\frac{1}{2})=\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[$. Silloin

$$A(x)\leq\pi(|x^2|+|x|+1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{|-3/2+2|}\leq\pi(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+1)+\frac{1}{2}+2<30.$$

Olkoon $s > 0$. Valitaan $r = \min(\frac{s}{30}, \frac{1}{2})$. Pätee

$$|f(x) - (-\pi + \frac{1}{2})| < s, \text{ kun } |x - (-1)| < r.$$

Usein annetun lausekkeen raja-arvo lasketaan käyttäen entuudestaan tunnettuja raja-arvoja ja seuraavaa tulosta:

Lause 2.9. Olkoon f, g reaalimuuttujan funktioita, $x_0 \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$. Oletetaan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \tag{15}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = b. \tag{16}$$

Silloin pätee:

a) $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = a + b$

b) $\lim_{x \to x_0} kf(x) = ka$

c) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)) = ab$

d) jos $b \neq 0$, niin $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

Todistus. a) Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Koska (15) ja (16) pätevät, on olemassa $r_1 > 0$ siten että

$$|f(x) - a| < \frac{r}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < r_1$$

ja $r_2 > 0$ siten että

$$|g(x) - b| < \frac{s}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < r_2.$$

Valitaan

$$r = \min(r_1, r_2) > 0.$$

Olkoon $|x - x_0| < r$. Pätee

$$|f(x)+g(x)-(a+b)| \leq |f(x)-a+g(x)-b| \leq |f(x)-a|+|g(x)-b| < \frac{s}{2}+\frac{s}{2} = s.$$

$\square$

Esimerkki 1. Lasketaan

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x}$$

kun $a > 0$ on jokin vakio.

Osoitetaan ensin, että

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{a+x} = \sqrt{a}.$$

Todistus. Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Valitaan $r = \sqrt{a} \cdot s$. Oletetaan, että $|x| < r$. Silloin

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{a+x} - \sqrt{a}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}\right| \\
&= \left|\frac{a+x-a}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}\right| \\
&= \frac{|x|}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} < \frac{|x|}{\sqrt{a}} < \frac{r}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\cdot s}{\sqrt{a}} = s. \quad \square
\end{aligned}$$

Pätee

$$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}$$

Lauseesta 2.9 (sivu 21) seuraa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} = \frac{\lim_{x\to 0} 1}{(\lim_{x\to 0}\sqrt{a+x})+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$\square$

Esimerkki 2. Laske

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}},$$

missä $a, b > 0$ ovat vakioita.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{2\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}.
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.10. Olkoon f määritelty välillä $]y, a[$, missä $y < a$. f:llä on vasemmanpuoleinen raja-arvo b pisteessä a, jos kaikille $s > 0$ löytyy $r > 0$ siten että

$$|f(x) - b| < s, \text{ kun } a - r < x < a.$$

Merkitään

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b.$$

Sanoin: Olkoon f määritelty välillä $]a, y[$, missä $y > a$. f:llä on oikeanpuoleinen raja-arvo b pisteessä a, jos kaikille $s > 0$ löytyy $r > 0$ siten että

$$|f(x) - b| < s, \text{ kun } a < x < a + r.$$

Merkitään

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b.$$

Lause 2.11. Olkoon $a \in \mathbf{R}$, ja olkoon f määritelty jossain a:n punkteeratussa ympäristössä. Funktiolla f on raja-arvo b pisteessä a, jos

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b = \lim_{x \to a+} f(x).$$

Määritelmä 2.12. Oletetaan, että f on määritelty jollain välillä $]c, \infty[$. Sanomme, että f:llä on pisteessä ∞ raja-arvo b, jos kaikille $s > 0$ voidaan löytää $M > 0$ siten, että

$$|f(x) - b| < s,$$

aina kun x toteuttaa ehdon $x > M$ ("$f(x)$ poikkeaa b:stä vain vähän, kun x on suuri").

Vastaavasti määritellään raja-arvo pisteessä $-\infty$. Oletetaan että f on määritelty välillä $]-\infty, c[$, $c \in \mathbf{R}$. Raja-arvo on b, jos $\forall\, s\ \exists\, M > 0$ siten, että $|f(x) - b| < s$ kun $x < -M$.

Määritelmä 2.13. Oletetaan, että $a \in \mathbf{R}$ ja f on määritelty jossain a:n punkteeratussa ympäristössä. Sanomme, että f:llä on raja-arvo ∞ pisteessä a, jos kaikille $M > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) > M$, kun x toteuttaa ehdon $|x - a| < r$. Vastaavasti raja-arvo on $-\infty$, jos kaikille $M > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) < -M$, kun x toteuttaa ehdon $|x - a| < r$.

Harjoitustehtävä. Määrittele

1. vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo ∞ tai $-\infty$ pisteessä a.

2. määrittele raja-arvo ∞ pisteessä ∞.

Esimerkki 1. Olkoon

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}.$$

Tutki f:n toispuoleisia raja-arvoja 0:ssa.

Ratkaisu. Oikeanpuoleinen: Olkoon $x > 0$. Tällöin

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = 1$$

ja

$$\lim_{x \to 0+} 1 = 1.$$

Samoin, jos $x < 0$, pätee

$$f(x) = \frac{x}{-x} = -1$$

ja

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1.$$

Siis, vasemmanpuoleinen raja-arvo on -1 ja oikeanpuoleinen raja-arvo on 1; raja-arvoa pisteessä 0 ei ole.

Esimerkki 2. Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{|x+3|}, \quad f : \mathbf{R} \setminus \{-3\} \to \mathbf{R}.$$

Väite: Pisteessä -3 raja-arvo on ∞.

Todistus. Olkoon $M > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että jos $|x - (-3)| < r$, niin $f(x) > M$. Valitaan r:ksi joku luku joka on pienempi kuin $\frac{1}{M}$, esimerkiksi $r = \frac{1}{2M}$. Jos nyt $|x + 3| < r$, niin

$$f(x) = \frac{1}{|x+3|} > \frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2M}} = 2M > M.$$

□

Esimerkki 3. Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \pi} + 2.$$

Väite:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2.$$

Todistus. Olkoon $s > 0$. On löydettävä $M > 0$ siten, että $|f(x) - 2| < s$, kun $x > M$.

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{x^2 + \pi}.$$

Olkoon esim. $x > 10$. Tällöin

$$\frac{1}{x^2 + \pi} < \frac{1}{10x + \pi} < \frac{1}{10x} < \frac{1}{x}.$$

Jos $M > \max(10, \frac{1}{s})$ ja $x > M$, niin

$$|f(x) - 2| < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} < \frac{1}{\frac{1}{s}} = s.$$

□

Esimerkki 4. Vastaavasti osoitetaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Esimerkki 5. Olkoot m ja n luonnollisia lukuja. Määrää

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0},$$

missä a_j, $j = 0, \ldots, m$ ja b_j, $j = 0, \ldots, n$ ovat reaalisia vakioita ja $a_m \neq 0 \neq b_n$.

a) Tapaus $n < m$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \cdots &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^m(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m})}{x^n(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n})} \\ &= \lim_{x\to\infty} x^{m-n} \frac{a_m + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} \end{aligned} \tag{17}$$

Käytetään apuna seuraavia päteviä tuloksia niitä tässä todistamatta:

- jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = a(\neq 0, \in \mathbf{R})$

  niin $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty$
- jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$

  niin $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = ab$

Kaavassa (17)

$$\lim_{x\to\infty} x^{m-n} = \infty$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n}(\in \mathbf{R}, \neq 0).$$

Tuloksen (2.4) nojalla raja-arvo on ∞.

b) Tapaus $n = m$

$$\lim_{x\to\infty} \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n}$$

c) Tapaus $n > m$

$$\lim_{x\to\infty} \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-m}} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}}$$

Tässä

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-m}} = 0,$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n} \in \mathbf{R}.$$

Tuloksen (2.4) nojalla raja-arvo on 0.

Esimerkki 6. Laske

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}.$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \\
= \; & \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \\
= \; & \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\
= \; & \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{x+1-x} \\
= \; & \lim_{x\to\infty} 2 \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\
= \; & \lim_{x\to\infty} 2 \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} + \sqrt{x}} \\
= \; & \lim_{x\to\infty} 2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)}{(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} + 1)} \\
= \; & \lim_{x\to\infty} 2 \cdot \tfrac{2}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.14. Olkoon $a \in \mathbf{R}^2$, ja f määrätty jossain a:n ympäristössä. Silloin f on jatkuva pisteessä a, jos

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

on olemassa ja

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Toisin sanoen, f on jatkuva pisteessä a, jos mielivaltaisella $s > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < s,$$

kun $|x - a| < r$. Jos f ei ole jatkuva a:ssa, sanotaan että se on epäjatkuva.

Esimerkki 1. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{kun } x \geq 3 \\ 1, & \text{kun } x < 3 \end{cases}.$$

Pisteessä 3:

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} 1 = 1, \quad \lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} x^2 = 9.$$

Näin ollen f:llä ei ole raja-arvoa pisteessä 3, joten se ei ole jatkuva.

Esimerkki 2. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{kun } x \neq 1 \\ 8, & \text{kun } x = 1 \end{cases}.$$

Tällöin pisteessä 1:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x - 5 = -3.$$

Pätee

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1),$$

joten f ei ole jatkuva.

Määritelmä. Sanomme, että f on jatkuva välillä $]a, b[\,, a < b$, jos f on jatkuva jokaisessa välin pisteessä.

Esimerkki 3. Määrätään f seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \text{ rationaalinen} \\ 0, & \text{kun } x \text{ irrationaalinen} \end{cases}.$$

Tällä ei ole raja-arvoa missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$, siis f ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki 4.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \text{ rationaalinen} \\ 0, & \text{kun } x \text{ irrationaalinen} \end{cases} .$$

Tällöin pätee

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad f(0) = 0.$$

Näemme että, f on jatkuva pisteessä 0. Voidaan osoittaa, että se ei ole jatkuva missään muussa pisteessä.

Heuristinen selitys: "Pomppiminen vaimenee, kun $x \to 0$".

Esimerkki 5. Näytä jatkuvuuden määritelmän perusteella, että

$$f(x) = \frac{1}{x} - 3x^2$$

on jatkuva pisteessä 2.

Ratkaisu. Olkoon $s > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että

$$|f(x) - (\frac{1}{2} - 12)| < s, \text{ kun } |x - 2| < r.$$

1° Tutkitaan lauseketta

$$|f(x) + \frac{23}{2}| \quad \text{eli} \quad |\frac{1}{x} - 3x^2 + \frac{23}{2}|;$$

pyritään estimoimaan lausekkeella $|x-2| \cdot A(x)$, missä $|A(x)|$ rajoitettua, kun esim. $|x - 2| < 1$, eli $x \in \,]1, 3[$.

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
|\tfrac{1}{x} - 3x^2 - (\tfrac{1}{2} - 12)| &= |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2} - 3x^2 + 12| \\
(\triangle\text{-ey}) &= |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2}| + |-3x^2 + 3 \cdot 2^2)| \\
&= |\tfrac{2-x}{2x}| + |3(2^2 - x^2)| \\
&= |x-2| \cdot \tfrac{1}{|2x|} + 3|2-x||2+x| \\
&= |x-2| \cdot \left[\tfrac{1}{|2x|} + 3|2+x|\right] \\
(x \in \,]1,3[) &\le |x-2| \cdot \left[\tfrac{1}{2} + 15\right] \\
&\le |x-2| \cdot 30
\end{aligned}$$

2° Oletetaan $r = \frac{s}{30}$. Jos $|x-2| < r$, niin

$$|x-2| < \frac{s}{30} \Rightarrow |f(x) - (\frac{1}{2} - 12)| < s \quad \square$$

Määritelmä 2.15. f on oikealta jatkuva pisteessä a, jos

$$f(a) = \lim_{x \to a+} f(x).$$

Samoin, f on vasemmalta jatkuva pisteessä a, jos

$$f(a) = \lim_{x \to a-} f(x).$$

Määritelmä. Olkoon $U \subset \mathbf{R}$ avoin osajoukko. f on jatkuva U:ssa, jos se on jatkuva jokaisessa U:n pisteessä.

Määritelmä 2.16. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ annettu. Se on jatkuva välillä $[a,b]$, jos se on jatkuva kaikissa $x \in \,]a,b[$ ja lisäksi oikealta jatkuva a:ssa ja vasemmalta jatkuva b:ssä.

Edelleen, f on paloittain jatkuva $[a,b]$:ssä jos f on jatkuva k.o. välillä lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä, joissa sillä on vasemman ja oikeanpuoleiset äärelliset raja-arvot. Lisäksi f:n tulee olla a:ssa oikealta jatkuva, b:ssä vasemmalta jatkuva.

Esimerkki. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{kun } x \leq 1 \\ x + a, & \text{kun } x > 1 \end{cases}.$$

Tehtävänä on määrätä a siten, että f on jatkuva $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
&f(1) = 2 \\
&\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x^2 + 1 = 2 \\
&\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 + a
\end{aligned}$$

Valitaan $a = 1$, jolloin

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 2 = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1).$$

Tällä valinnalla f on jatkuva (koko $\mathbf{R}$:ssä).

Esimerkki. Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kun } x \leq a \\ 1 - x^2, & \text{kun } x > a \end{cases}.$$

Haluamme valita luvun a siten, että f on jatkuva ($\mathbf{R}$:ssä). Pätee

$$\begin{array}{l} f(a) = a - 1 \\ \lim_{x\to a-} f(x) = a - 1 \\ \lim_{x\to a+} f(x) = 1 - a^2 \end{array}.$$

Näin olen f on jatkuva kun a valitaan siten, että

$$\begin{aligned} &a - 1 = 1 - a^2 \\ &\iff a^2 + 2 - 2 = 0 \\ &\iff a = 1 \bigvee a = -2. \end{aligned}$$

Lause 2.17. Jos f ja g ovat jatkuvia pisteessä a (avoimessa joukossa U), niin funktiot $f+g$ ja $f \cdot g$ ovat jatkuvia a:ssa (U:ssa).

Jos lisäksi g on $\neq 0$ pisteessä a (joukossa U) niin $\frac{f}{g}$ on jatkuva pisteessä a (joukossa U).

Todistus. Lause 2.9 (sivu 21). □

Seuraus. Polynomit ovat jatkuvia.

Lause 2.18. Jos f on jatkuva ja g on epäjatkuva pisteessä a, niin $f+g$ on epäjatkuva.

Todistus. Jos $f+g$ olisi jatkuva, niin

$$g = f + g - f = \underbrace{f+g}_{\text{jva}} + \underbrace{(-f)}_{\text{jva}}$$

on jatkuva, ristiriita. □

Lause 2.19. Jos f on jatkuva ja $\neq 0$ pisteessä a ja g on epäjatkuva, niin fg on epäjatkuva.

Todistus. Jos fg olisi jatkuva, niin myös g olisi:

$$g = \frac{g}{f} \cdot f = \frac{\overbrace{gf}^{\text{jva}}}{\underbrace{f}_{\text{jva}}}.$$

□

Esimerkki. Oletetaan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ 10, & x < 3 \end{cases}.$$

Molemmat ovat epäjatkuvia pisteessä $x = 3$, Mutta

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 3 \\ 10, & x < 3 \end{cases}$$

on jatkuva.

Esimerkki. Oletetaan

$$f(x) = (x-2)^2, \quad g(x) = \begin{cases} 32, & x > 2 \\ -32, & x < 2 \end{cases},$$

missä g on epäjatkuva. Mutta fg on jatkuva:

$$\lim_{x \to 2+} (x-2)^2 \cdot 32 = 0, \quad \lim_{x \to 2-} (x-2)^2 \cdot (-32) = 0.$$

Lause 2.20. Oletetaan että f ja g ovat jatkuvia pisteessä a. Silloin

$$x \mapsto |f(x)| \quad \text{ja} \quad x \mapsto \max(f(x), g(x))$$

ovat jatkuvia.

Todistus. Olkoon $s > 0$ annettu, f jatkuva a:ssa. Voidaan löytää $r > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \frac{s}{2}, \text{ kun } |x-2| < r.$$

Osoitetaan, että

$$\Big| |f(x)| - |f(a| \Big| < s.$$

Mutta nyt pätee

$$\Big| |f(x)| - |f(a| \Big| \overbrace{\leq}^{\triangle\text{-ey}} |f(x) - f(a)| < \frac{s}{2} < s, \text{ kun } |x-a| < r.$$

Samoin

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(|f-g| + f + g)$$

on jatkuva. $\square$

2.5 Trigonometriset funktiot

Funktiot $\sin \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $\cos \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ voitaisiin määritellä sarjoilla

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Koska emme vielä ole perehtyneet sarjateoriaan, asiaan palataan Analyysi III:ssa.

Edellä mainituista kaavoista voidaan johtaa seuraavat perusominaisuudet:

1° $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

2° $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3° Yhteenlaskukaavat:

3. Yhteenlaskukaavat:

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4° $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Geometrinen tulkinta

Voidaan osoittaa:

$$\sin\theta = \text{kehäpisteen } y\text{-koordinaatti}$$

$$\cos\theta = \text{kehäpisteen } x\text{-koordinaatti}$$

kun $\theta \in [0, 2\pi]$ on kulma radiaaneissa (katso Kuvat (1) ja (2)).

Toinen geometrinen tulkinta: Suorakulmaisessa kolmiossa (katso Kuva (3))

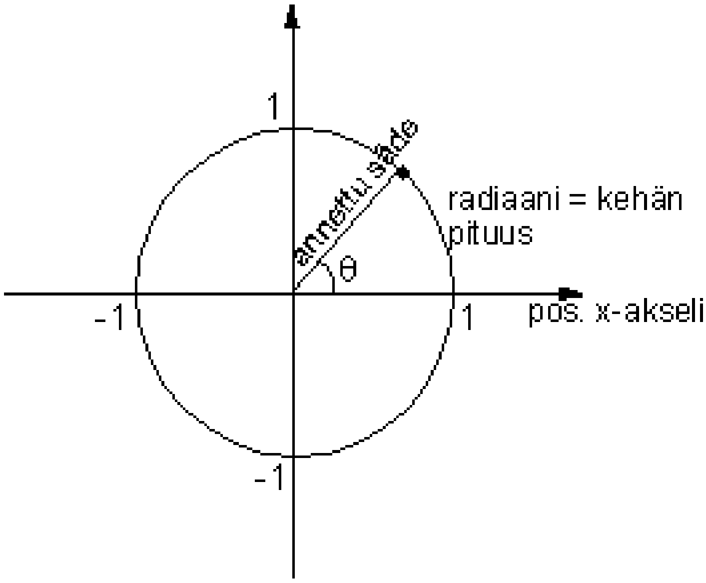
$$\sin\theta = \frac{b}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{c}{a}$$

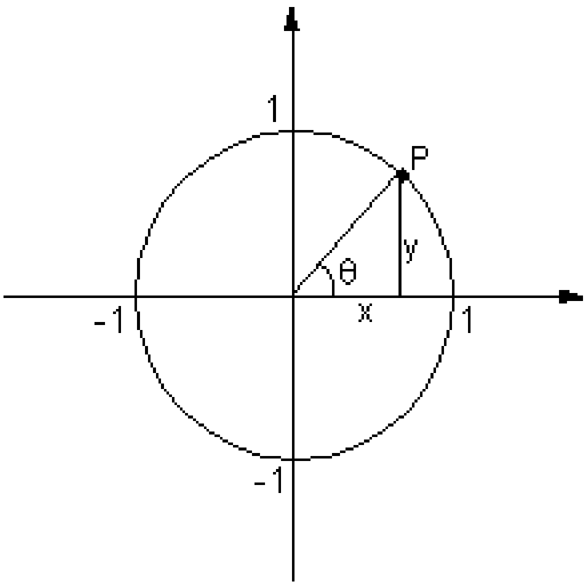
Lause 2.21. Funktiot sin ja cos ovat 2π-jaksollisia, eli

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

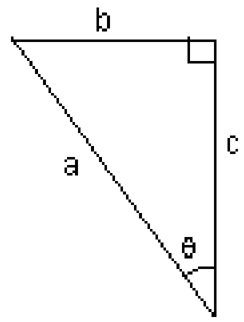
Lisäksi



Kuva 1: Geometrinen tulkinta ympyrässä



Kuva 2: Geometrinen tulkinta ympyrässä



Kuva 3: Geometrinen tulkinta kolmiossa

- $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbf{R}$
- $\sin 0 = 0 = \sin \pi$,

  $0 < \sin x$, kun $0 < x < \pi$

  $0 > \sin x$, kun $\pi < x < 2\pi$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0 = \cos \frac{3\pi}{2}$,

  $\cos x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

  $\cos x < 0$, kun $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Nämä voidaan johtaa edellellä mainituista sarjaesityksistä.

Määritelmä 2.22. Määritellään seuraavat trigonomiset funktiot:

Tangentti: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Kotangentti: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Sekantti: $\sec x = \frac{1}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Kosekantti: $\csc x = \frac{1}{\sin x}, x \neq n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$.

Suorakulmaisessa kolmiossa pätee

$$\tan \theta = \frac{b}{c}$$

$$\cot \theta = \frac{c}{b}$$

Trigonometristen funktioiden ominaisuuksia

Lause 2.23. Funktio sin on pariton, cos parillinen:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Todistus. Yhteenlaskukaavoista seuraa

$$\sin 0 = \sin(x + (-x)) = \sin x \cos(-x) + \cos x \sin(-x) \tag{18}$$

$$\cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x). \tag{19}$$

Kerrotaan yhtälö (18) $\sin x \cos x$:llä:

$$0 = \sin^2 x \cos(-x) \cos x + \cos^2 x \sin x \sin(-x) \tag{20}$$

Kaavasta (19) seuraa

$$\cos x \cos(-x) = 1 + \sin x \sin(-x). \tag{21}$$

Sijoitetaan tämä (20):een, saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \sin^2 x(1 + \sin x \sin(-x)) + \cos^2 x \sin x \sin(-x) \\ &= \sin^2 x(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1})(\sin x \sin(-x)) \\ &= \sin^2 x + \sin x \sin(-x) \end{aligned} .$$

Jaetaan $\sin x$:llä (kun $x \neq n\pi$), saadaan

$$0 = \sin x + \sin(-x) \iff \sin(-x) = -\sin x \quad \square$$

Kaava $\cos x = \cos(-x)$ seuraa (18):stä sijoittamalla saatu $\sin(-x) = -\sin x$ ja jakamalla $\sin x$:llä.

Poikkeusarvot $x = n\pi$ jne. hoidetaan ”käsityönä”. $\square$

Seuraus. Funktiot $\tan, \cot$ ja csc ovat parittomia ja sec parillinen.

Lause 2.24. Jos $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, niin

$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

Jos $x \neq n\pi$, niin

$$\cot(x + \pi) = \cot x.$$

Todistus.

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+pi)} = \frac{\sin x\cos\pi + \cos x \overbrace{\sin\pi}^{=0}}{\cos x\cos\pi - \sin x\underbrace{\sin\pi}_{=0}} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos\pi}{\cos\pi} = \tan x,$$

$$\cot(x+\pi) = \frac{1}{\tan(x+\pi)} = \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

□

Huomaa myös, että $\sin x = \cos x$, kun $x = \frac{\pi}{4}$. Kaavasta (19) saadaan siten

$$\begin{aligned} & (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 + (\cos\tfrac{\pi}{4})^2 = 1 = (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 + (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 = 2(\sin\tfrac{\pi}{4})^2 \\ \Longrightarrow\ & (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Näin ollen:

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \tan\tfrac{\pi}{4} &= 1 = \cot\tfrac{\pi}{4}, \\ \csc\tfrac{\pi}{4} &= \sec\tfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Muita kaavoja trigonometrisille funktioille

- $1+\tan^2 x = \sec^2 x$, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
- $1+\cot^2 x = \csc^2 x$, kun $x \neq n\pi$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Todistus. Yhteenlaskukaavoilla. □

Lause 2.25. Funktiot sin ja cos ovat jatkuvia.

Todistus. Sini: Kaavat

$$\sin 0 = 0 \tag{22}$$

ja

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{23}$$

pätevät. Olkoon $s > 0$. Tällöin (23):sta seuraa, että

$$\exists\ r > 0 \text{ siten, että } |\frac{\sin x}{x} - 1| < s,\ \text{ kun } |x| < r.$$

Nyt

$$|\sin x| = |\sin x - x + x| \leq |\sin x - x| + |x| = |x|\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| + |x|. \qquad (24)$$

Yllä nähtiin, että on olemassa $r' > 0$ siten, että

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leq 1, \text{ kun } |x| < r'.$$

Jos $|x| < r'$, yhtälöstä (24) seuraa

$$|\sin x| \leq 2|x|.$$

Tästä seuraa

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Yhtälön (22) ja jatkuvuuden määritelmän nojalla sini on siten jatkuva 0:ssa.

Edelleen,

$$0 \leq 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq 2x^2, \text{ kun } |x| < r'$$

Siis,

$$0 \leq 1 - \cos x \leq 2x^2 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0 \quad \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$

Ja cos on jatkuva pisteessä 0.

Olkoon $y \in \mathbf{R}$. Yhteenlaskukaavasta saadaan

$$\begin{aligned}
\sin(y + x) &= \sin y \cos x + \cos y \sin x \\
&\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin(y + x) = \lim_{x\to 0}(\sin y \cos x + \cos y \sin x) \\
&= \sin y(\underbrace{\lim_{x\to 0} \cos x}_{=1}) + \cos y(\underbrace{\lim_{x\to 0} \sin x}_{=0}) \\
&= \sin y.
\end{aligned}$$

Siis, sinin raja-arvo pisteessä y 0n $\sin y$. Siksi sini on jatkuva pisteessä y. Vastaavasti todetaan kosinin jatkuvuus. $\square$

Esimerkki 1. Laske

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \qquad (25)$$

Pätee

$$\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$$

kaikilla $y \in \mathbf{R}$. Sijoitetaan $y = \frac{x}{2}$, saadaan (25)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{2},$$

koska

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$

Esimerkki 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x\cdot\frac{x}{\sin x} = (\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2})(\lim_{x\to 0} x)(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}) = 0$$

Esimerkki 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2$$

Esimerkki 4. Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Laske

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\tan x - \sin x}.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\tan x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\sin x}\frac{\cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\frac{x^2}{1-\cos x}(\cos x)x^{k-3} \\
&= (\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x})(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x})(\lim_{x\to 0}\cos x)(\lim_{x\to 0} x^{k-3}) \\
&= 1\cdot 2\cdot 1\cdot \lim_{x\to 0} x^{k-3} = \begin{cases} 0, & k>3 \\ 2, & k=3 \\ \nexists, & k=2 \\ +\infty, & k=1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Trigonometrisiä funktioita sisältävistä yhtälöistä

Ratkaisemisessa käyteään trigonometristen funktioiden periodisuutta, yhteenlaskukaavoja ja kekseliäisyyttä.

Esimerkki 1. Olkoot P ja Q polynomeja. Ratkaise yhtälö

$$\sin(P(x)) = \sin(Q(x)).$$

Ratkaisu.

$$\left\{\begin{array}{rcl} P(x) & = & Q(x) + 2\pi \cdot k, \text{ jollekin } k \in \mathbf{Z} \\ \text{tai} & & \\ P(x) & = & (\pi - Q(x)) + 2\pi \cdot k, \text{ jollekin } k \in \mathbf{Z} \end{array}\right. .$$

Yhtälö palautuu siten polynomin 0-kohtien etsimiseen.

Esim.

$$P(x) = x^2 + 1, \quad Q(x) = 5x + \pi$$

jolloin yhtälö on

$$\sin(x^2 + 1) = \sin(5x + \pi).$$

Sillä on seuraavat ratkaisut:

i)

$$\begin{array}{rl} & x^2 + 1 = 5x + \pi + 2\pi \cdot k \\ \iff & x^2 - 5x + 1 - \pi - 2\pi \cdot k = 0 \\ \iff & x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1 - \pi - 2\pi k)}}{2}. \end{array}$$

Tässä oltava $x \in \mathbf{R}$, mikä pätee kun kokonaisluku k toteuttaa

$$25 - 4(1 - \pi - 2\pi k) \geq 0 \quad \text{eli} \quad k \geq \frac{-21 - 4\pi}{8\pi},$$

ii)

$$x^2 + 1 = 5x + \pi + \pi - x + 2\pi \cdot k \iff x^2 - 4x + 1 - 2\pi(k + 1) = 0$$

Tämä ratkaistaan samaan tapaan.

Huom! Jos f, g ovat mitä tahansa reaalimuuttujan funktioita, yhtälö

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x))$$

palautuu yhtälöihin

$$f(x) = g(x) + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{ja} \quad f(x) = \pi - g(x) + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Esimerkki 2. Olkoot f, g annettuja funktioita $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Yhtälö

$$\cos(f(x)) = \cos(g(x))$$

toteutuu jos ja vain jos

$$f(x) = g(x) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{tai} \quad f(x) = -g(x) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Samoin

$$\tan(f(x)) = \tan(g(x))$$
$$\iff \begin{cases} f(x) = g(x) + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \\ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \neq g(x) \quad \forall\, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Samoin

$$\cot(f(x)) = \cot(g(x)).$$

(Harjoitustehtävä.)

Esimerkki 3. Olkoon $P(x)$ ja $Q(x)$ polynomeja. Ratkaise yhtälö

$$\tan P(x) = \cot Q(x).$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} \tan P(x) = \cot Q(x) &\iff \tfrac{\sin P(x)}{\cos P(x)} = \tfrac{\cos Q(x)}{\sin Q(x)} \\ &\iff \sin P(x) \sin Q(x) = \cos Q(x) \cos P(x) \\ &\iff \sin P(x) \sin Q(x) - \cos Q(x) \cos P(x) = 0 \\ &\iff \cos(P(x) + Q(x)) = 0 \\ &\iff P(x) + Q(x) = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ jollekin } k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Tässä x oltava sellainen, että $\tan P(x)$ ja $\cot Q(x)$ ovat määriteltyjä.

Esimerkki 4. Ratkaise

$$\cos x \cdot \cos(x+1) = 1. \tag{26}$$

Koska $|\cos x| \leq 1$, (26) toteutuu jos

$$\begin{cases} \cos x &= 1 \\ \cos(x+1) &= 1 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \cos x &= -1 \\ \cos(x+1) &= -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 2\pi \cdot k, k \in \mathbf{Z} \\ x+1 &= 2\pi \cdot n, n \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x &= \pi + 2\pi \cdot k, k \in \mathbf{Z} \\ x+1 &= \pi + 2\pi \cdot n, n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\iff 1 = 2\pi(n-k), n, k \in \mathbf{Z} \quad \text{tai} \quad 1 = 2\pi(n-k)n, k \in \mathbf{Z}.$$

Yhtälö $1 = 2\pi(n-k)$ ei toteudu millään n, k

$$\underbrace{\pi}_{\in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} = \underbrace{\frac{1}{2(n-k)}}_{\in \mathbf{Q}}$$

Esimerkki 5.

$$\underbrace{\sin x + \cos(2\pi + x)\cos(x+1)}_{\leq 2} = 3$$

Ei ratkaisua.

2.6 Funktioiden yhdistäminen

Esimerkki. Tarkastellaan funktioita

$$f : x \mapsto \sin^2 x.$$

Funktion f voidaan yhdistää funktioista

$$x \mapsto \sin x \text{ ja } y \mapsto y^2.$$

Vastaavasti $x \mapsto 2^{\sin \sqrt{x}}$ on yhdistetty funktioista

$$x \mapsto \sqrt{x}, y \mapsto \sin y \text{ ja } z \mapsto 2^z.$$

Määritelmä Olkoon $A, B, C, \subset \mathbf{R}$, ja $f : A \to B, g : B \to C$. Määritellään yhdistetty kuvaus

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Funktioiden yhdistäminen on liitännäistä: Olkoot $A, B, C, D \subset \mathbf{R}$, $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$. Silloin pätee

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Näin ollen voidaan merkitä

$$h \circ g \circ f := (h \circ g) \circ f.$$

Harjoitustehtävä. Olkoon $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{|x| + 1}$. Laske $f \circ (h + k)$ ja $(g + 2k) \circ f$.

Lause 2.26. Oletetaan että $f : A \to B$ on jatkuva pisteessä $a \in A$ ja $g : B \to C$ on jatkuva pisteessä $b := f(a) \in B$. Tällöin $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a.

Todistus. Olkoon $s > 0$. Halutaan löytää luku $r > 0$ siten, että

$$|g \circ f(x) - g \circ f(a)| < s, \text{ kun } |x - a| < r.$$

Koska g on jatkuva b:ssä, on olemassa $r' > 0$, jolle

$$|g(x) - g(b)| < s, \text{ kun } |x - b| < r'. \tag{27}$$

Koska f on jatkuva a:ssa, on olemassa $r > 0$, jolle

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - b| < r', \text{kun } |x - a| < r. \tag{28}$$

Yhteenveto: jos $|x - a| < r$, niin $|f(x) - b| < r'$. Silloin (27):sta seuraa

$$|g(f(x)) - g(b)| < s \text{ eli } |g \circ f(x) - g \circ f(a)| < s.$$

□

Iteraatioteoriaa

Olkoon $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to A$. Merkitään

$$f^n(x) := (f \circ f \circ \ldots \circ f)(x) = f(f(f(\ldots f(x)\ldots)))$$

f:n n:s iteraatti.

(Huom!

$$f(x)^n = f(x)f(x)\ldots f(x) \neq f^n(x) \quad).$$

Valitettavasti trigonometrisille funktioille $\sin^2 x = (\sin x)^2$, mikä ei ole sopusoinnussa edellä mainitun yleisen merkinnän kanssa.

Esimerkki. $A = \mathbf{R}$ ja $f(x) = x^3 + 1$.

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (x^3+1)^3 + 1 \text{ on 9. asteen polynomi} \\ f(x)^2 &= (x^3+1)^2 \text{ on 6. asteen polynomi.} \end{aligned}$$

Samoin, jos

$$g(x) = \frac{1}{x^2+2},$$

niin

$$g^2(x) = \frac{1}{(\frac{1}{x^2+2})^2 + 2} = \frac{1}{\frac{1}{x^4+4x^2+4} + 2} = \frac{x^4+4x^2+4}{9+2x^4+8x^2}.$$

Tarkastellaan yhtälöä

$$x = f(x), \tag{29}$$

missä $x \in \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Jos tiedetään, että on olemassa suljettu väli

$$B \subset \mathbf{R} \quad (B = [a, b]\,, |a|, |b| < \infty)$$

siten, että $f(B) \subset B$ (eli $f(x) \in B \forall x \in B$) ja on olemassa $0 < c < 1$ siten, että

$$|f'(x)| < c \quad \forall x \in B$$

niin luku

$$y = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) \tag{30}$$

(missä $x_0 \in B$ voidaan valita mielivaltaisesti) on yhtälön (29) ratkaisu. Ratkaisu (30) on yksikäsitteinen välillä B.

Tämä tulos on erikoistapaus Boanachin kiintopistelauseesta.

Esimerkki 1. Yhtälö

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x + x = 0$$

voidaan kirjoittaa muodossa $x = -\frac{1}{2}\cos x$. Siis,

$$f(x) = -\frac{1}{2}\cos x.$$

Otetaan $B = [-1, 1] \Rightarrow f(B) \subset B$ ja

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin x \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}\forall x \in B.$$

Yhtälölle on siis yksikäsitteinen ratkaisu välillä $[-1, 1]$.

Esimerkki 2. Yhtälön

$$x^8 + \sin x - 4x = 0$$

ratkaisu on $x = \frac{1}{4}(x^8 + \sin x)$.

$$f'(x) = 2x^7 + \frac{1}{4}\cos x.$$

Valitaan $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Jos $x \in B$, niin

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq 2 \cdot \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2} \\ |f(x)| &\leq \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^8 + \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2}, \text{ josta } f(x) \in B. \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa ratkaisu on $x = 0$. Muita ratkaisuja ei ole välillä $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

2.7 Käänteisfunktio

Lause 2.27 (Bolzanon lause). Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Funktio f saa jokaisen arvon joka on arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välillä. Erityisesti jos $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, niin on olemassa $y \in [a, b]$ jolle $f(y) = 0$.

Tulosta voidaan käyttää yhtälöjen likimääräiseen ratkaisemiseen.

Esimerkki 1. Yhtälö

$$P(x) = 0, \tag{31}$$

missä

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1,$$

pätee

$$P(0) = -1, \quad P(1) = 1.$$

Siis (31):llä on ratkaisu välillä $]0,1[$. Edelleen

$$\begin{array}{rcl@{\quad}c@{\quad}l} P(\frac{1}{2}) & = & \frac{17}{16} & \Rightarrow & \text{ratkaisu} \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\\ P(\frac{1}{4}) & = & \frac{49}{256} & \Rightarrow & \text{ratkaisu} \in \left]0,\frac{1}{4}\right[\\ P(\frac{1}{8}) & = & -\frac{1567}{1098} & \Rightarrow & \text{ratkaisu} \in \left]\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right[\\ & \text{jne..} & & & \end{array}$$

Määritelmä 2.28. Olkoon $A, B \subset \mathbf{R}$ ja $f : A \to B$ bijektio. Silloin vastaa jokaista $y \in B$ täsmälleen yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Näin tulee määritellyksi funktio $g : B \to A$, f:n käänteisfunktio. Se toteuttaa:

$$\begin{array}{rcl} g \circ f(x) & = & x \quad \forall x \in A \\ f \circ g(x) & = & x \quad \forall x \in B. \end{array}$$

Yleensä merkitään $g =: f^{-1}$.

Esimerkki. Olkoon $f(x) = 2x+1$. Tämä on bijektio $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Käänteisfunktion lauseke löydetään ratkaisemalla yhtälöstä

$$2x + 1 = y \tag{32}$$

x luvun y:n funktiona:

$$(32) \iff 2x = y - 1 \iff x = \frac{y-1}{2}.$$

Siis $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

Lause 2.29. Oletetaan, että funktio f toteuttaa:

1° f on jatkuva välillä $\triangle$, missä $\triangle$ on jokin seuraavista: $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b]$, $[a,b[$, $]-\infty,a[$, $]-\infty,a]$, $[a,\infty[$, $]a,\infty[$.

2° f on aidosti kasvava, eli $f(x) > f(y)$, kun $x > y$, $x, y \in \triangle$.

Silloin joukko $\triangle' := f(\triangle) := \{y \mid y = f(x) \text{ jollekin } x \in \triangle\}$ on jotain edellä mainittua tyyppiä, f:llä on käänteiskuvaus $f^{-1} : \triangle' \to \triangle$, ja f^{-1} on jatkuva ja aidosti kasvava.

Huomautus. Jos f on aidosti vähenevä ($f(x) < f(y)$ kun $x > y$), niin sama pätee, mutta f^{-1} on aidosti vähenevä.

Huomautus. Jos $f(x) = x^2$, $\triangle =]0,\infty[$ niin f on aidosti kasvava. $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{x^2}$ vaan $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Tarkastellaan potenssifunktiota $f(x) = x^n$, missä $n \in \mathbf{N}$. Kun $n = 1$, käänteisfunktiolle pätee $f^{-1}(x) = x = f(x)$.

Olkoon $n \geq 2$. Tarkastellaan tapausta $\triangle = [0, \infty[$. Potenssiinkorotuksen laskusäännöistä seuraa, että $x^n > y^n$ Jos $x > y \geq 0$.

Lauseesta 2.29 (sivu 44) seuraa, että f:llä on olemassa käänteisfunktio, jota merkitään $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Koska

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty,$$

pätee $f(\triangle) = [0, \infty[=: \triangle'$ ja $\sqrt[n]{x}$ on siten määritelty $\forall x \in [0, \infty[$.

Jos lisäksi n on pariton, silloin f on aidosti kasvava myös joukossa $]-\infty, 0]$. Lisäksi

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty.$$

Jos nyt merkitään $\triangle =]-\infty, \infty[= \mathbf{R}$, niin $\triangle' := f(\triangle) = \mathbf{R}$. Merkitään edelleen käänteisfunktiota $\sqrt[n]{x}$; kun n on pariton tämä on siis määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$.