# Analyysi I

Jari Taskinen

26. marraskuuta 2001

## Luku 2

## Sisältö

# 2. Reaalimuuttujan funktiot

Reaalimuuttujan funktiot

Olkoot $A, B$ $\mathbf{R}:n$ tai $\mathbf{C}:n$ osajoukkoja. Jos jokaista joukon $A$ pistettä $x$ vastaa tietty $B$:n piste $y$, sanotaan että on määritelty funktio eli kuvaus $f : A \to B$.

**Määritelmä.** Sanomme että $y$ on alkion $x$ kuva, merkitään myos $f(x)$. $A$ on kuvauksen $f$ lähtöjoukko, $B$ maalijoukko.

Jos on annettu osajoukko $A_1 \subset A$, niin merkitään

$$f(A_1) = \left\{ y \in B \;\middle|\; \exists x \in A_1 \text{ s.e. } y = f(x) \right\}$$

**Esimerkki.** $A = ]-2, 5[$, $B = [-100, 100]$, $f(x) = x^2 + 1$, $f = A \to B$. Olkoon $A_1 = [0, 1]$. Silloin $A_1$:n kuva $f(A_1) = [1, 2]$.

**Määritelmä.** Jos $A, B, f$ kuten yllä, $y \in B$ ja $x$ toteuttaa $f(x) = y$, niin $x$ on $y$:n (eräs) alkukuva.

Funktiolla on aina se ominaisuus, että jokaisella lähtojoukon alkiolla on täsmälleen yksi kuva; maalijoukon alkiolla voi olla $0, 1$ tai useampia alkukuvia.

**Esimerkki.** $A = ]-2, 5[$, $B = [-100, 100]$, $f(x) = x^2 + 1$. Joukon $B$ alkiolla 2 on kaksi alkukuvaa: 1 ja $-1$. Alkiolla $72.83$ ei ole alkukuvia joukossa A.

Sisältö:
Reaalimuuttujan funktiot
Polynomit
Algebrallisista yhtälöistä
Rationaalifunktiot
Funktion raja-arvo ja jatkuvuus
Trigonometriset funktiot
Funktioiden yhdistäminen
Käänteisfunktio

Etusivu

Sivu 2 / 71

Takaisin

Koko näyttö

Lopeta

Jos $B_1 \subset B$, $(A, B, f$ kuten edellä) on joukko

$$f^{-1}(B_1) = \left\{ x \in A \;\middle|\; f(x) \in B_1 \right\}$$

$B_1$:n alkukuva.

- Jos kuvaukselle $f$ pätee $f(A) = B$, niin $f$ on surjektio ($A$:sta $B$:lle).
- Jos kuvaukselle $f$ pätee: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, niin $f$ on injektio (tässä $x_1, x_2, \in A$ mielivaltaisia).
- Jos $f$ on sekä surjektio että injektio, niin se on bijektio.

**Esimerkki.** $f(x) := x^2 + 1$.

ei ole injektio eikä surjektio kun $A = ]-2, 5[$, $B = [-100, 100]$

ei ole injektio, on surjektio kun $A = ]-2, 5[$, $B = [1, 26[$

on injektio, ei ole surjektio kun $A = ]0, 5[$, $B = [-100, 100]$

on injektio ja surjektio kun $A = ]0, 5[$, $B = ]1, 26[$

**Esimerkki.** Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Identtinen kuvaus $f(x) = x$ on bijektio $f : A \to A$.

**Määritelmä.** Olkoon $f : A \to B$ ja $A_1 \subset A$. Kuvaus $g : A_1 \to B$ joka määritellään kaavalla $g(x) = f(x) \quad \forall x \in A_1$ on nimeltään $f$:n rajoittuma joukkoon $A_1$. Merkitään $g = f|_{A_1}$.

**Huomautus!** Kaksi kuvausta $f : A \to B$ ja $g : C \to D$ ovat samat jos

1. $A = C$
2. $B = D$
3. $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$

**Esimerkki.** Olkoon $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Jos muuta ei ole sanottu, niin maalijoukko on $\mathbf{R}$, ja lähtöjoukko mahdollisimman suuri joukko, jossa lauseke on määritelty, tässä $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

## 2.1. Polynomit

Polynomit

Polynomi on funktio $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ joka on muotoa

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

missä $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ ovat vakioita (polynomin kertomia). Polynomi voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Jos $a_n \neq 0$, on $P$:n asteluku $n$. Jos $a_n = 0 \quad \forall n$, niin sanomme, että $P$ on $0-$ polynomi.

**Lause 2.1.** (Jakoyhtälö) Olkoot $P$ ja $Q$ polynomeja, $Q$ ei $0$-polynomi. Tällöin on olemassa polynomit $A$ ja $R$, joille

$$P = AQ + R,$$

missä $R$:n aste on alempi kuin $Q$:n aste, tai $R$ on $0-$ polynomi. Polynomit $A$ ja $R$ ovat yksikäsitteiset.

*Todistus.* Tarkastellaan joukkoa

$$\mathcal{E} := \left\{ P - AQ \;\middle|\; A \text{ on polynomi} \right\}$$

Siis, $\mathcal{E}$ on polynomeista koostuva joukko; siihen kuuluvat ne polynomit jotka ovat muotoa $P - AQ$, missä $A$ on polynomi.

Jos $0$-polynomi kuuluu joukkoos $\mathcal{E}$, niin siis olemassa $A$ s.e. $Q = P - AQ$ eli $P = AQ$. Tällöin voidaan valita $R = 0$ ja lause on todistettu.

Muussa tapauksessa olkoon $R$ joukon $\mathcal{E}$ alinta astetta oleva polynomi; olkoon $A_0$ vastaava $A$. Siis, $R = P - A_0Q$ eli $P = A_0Q + R$.

**Väite.** $R$:n asteluku $n$ on pienempi kuin $Q$:n asteluku $m$.

Jos pätee $n \geq m$, merkitään

$$\begin{aligned} R &= r_nx^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_0 \\ Q &= q_mx^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_0 \end{aligned}$$

tällöin

$$R - \frac{r_n}{q_m}x^{n-m}Q = P - (A_0 + \frac{r_n}{q_m}x^{n-m})Q \in \mathcal{E}$$

Toisaalta,

$$\begin{aligned} R - \tfrac{r_n}{q_m}x^{n-m}Q &= r_nx^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_0 - \underbrace{\frac{r_n}{q_m}x^{n-m}(q_mx^m}_{-r_nx^n+\ldots x^{n-1}+\ldots} + \ldots + q_0) \\ &= \ldots x^{n-1} + \ldots x^{n-2} + \ldots \end{aligned}$$

eli $n$:s aste supistuu pois!

Yhteenvetona, polynomi

$$R - \frac{r_n}{q_m} x^{n-m} Q$$

1) kuuluu joukkoon $\mathcal{E}$

2) on enintään astetta $n-1$.

Tämä on ristiriita, koska $R$;n aste on $n$; pätee $m > n$. $\square$

Käytännössä $A$ ja $R$ löydetään jakokulman avulla.

$$P = x^3 + x^2 + x + 1, \quad Q = x^2 + 1$$

Jaetaan jakokulmassa $x^3 + x^2 + x + 1$ polynomilla $x^2 + 1$, saadaan $x + 1$. Tällöin $A = x + 1$, $R = 0$.

**Esimerkki.** $P = x^3 + 3x^2 - x - 1$, $Q = x + 2$. Jaetaan jakokulmassa $x^3 + 3x^2 - x - 1$ polynomilla $x + 2$, saadaan $x^2 + x - 3$ ja jakojäännökseksi $5$. Siis, $A = x^2 + x - 3$ ja $R = 5$. Voidaan tarkistaa laskemalla, että

$$QA + R = (x+2)(x^2 + x - 3) + 5 = x^3 + 3x^2 - x - 1 = P.$$

Olkoon $P$ polynomi ja olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$. Jakoyhtälön avulla voidaan kirjoittaa

$$P(x) = (x - x_0)A + R, \tag{1}$$

missä $Q = x - x_0$, $Q$:n aste $\deg(Q) = 1$, ja siten $\deg(R) = 0$. Siis $R$ on vakio (mahdollisesti jopa $0$).

Oletetaan, että $x_0$ on polynomin $P$:n $0$-kohta, $P(x_0) = 0$. Silloin (1) $\Rightarrow$

$$P(x_0) = (x_0 - x)A(x_0) + R(x_0) \iff 0 = R(x_0)$$

(syötetään (1):ssä $x$:n paikalle $x_0$). Koska $R$ on vakio ja $R(x_0) = 0$, niin $R$ on $0$-polynomi.

**Lause 2.2.** Jos polynomilla $P$ on $0$-kohta $x_0$, niin se voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = (x - x_0)A(x)$$

missä $A$ on polynomi jolle deg(A) = deg(P) $-1$ .

**Lause 2.3.** Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Jos $n$:n asteen polynomilla $P$ on $0$-kohdat $x_1, \ldots, x_n$ niin $P$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \quad \left(=: a_n \Pi_{j=1}^{n}(x - x_j)\right).$$

(Tässä $a_n$ on $P$:n korkeimman asteen termin kerroin.)

*Todistus.* Seuraa lauseesta 2.2 (sivu 7). $\square$

**Seuraus 2.4.** $n$:n asteen polynomilla on enintään $n$ kpl eri $0$-kohtia.

*Todistus.* Jos $0$-kohtia $m$ kpl, missä $m > n$, niin lauseesta 2.3 (sivu 7) seuraa

$$P(x) = a_n \Pi_{j=1}^{m}(x - x_1) = \underbrace{a_n}_{\neq 0} x^m + x^{m-1} + \ldots$$

eli $P$ olisi $m$:n asteen polynomi, Ristiriita. $\square$

**Määritelmä.** Jos polynomi $P$ voidaan esittää muodossa

$$P(x) = (x - x_0)^m Q(x),$$

missä $Q$ on polynomi, $m \in \mathbf{N}$, niin $x_0$ on $P$:n $m$:n kertaluvun $0$-kohta.

**Esimerkki.** Olkoon $P(x) = x^4$. Piste $x_0 = 0$ on $P$:n 4. kertaluvun $0$-kohta.

**Esimerkki.** Olkoon $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$. Piste $x_0 = 1$ on 3. kertaluvun $0$-kohta.

**Lause 2.5.** Olkoon $P$ polynomi, jolle $\deg(P) = n$. Oletetaan, että $P$:llä on pisteissä $a_1, a_2, \ldots, a_M$ $0$-kohdat ja että $0$-kohdan $a_j$ kertaluku on $m_j$.

Oletetaan että $m_1 + m_2 + \ldots + m_M = n = \deg(P)$. Silloin polynomi $P$ voidaan esittää muodossa

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_M)^{m_M}.$$

Emme todista tätä lausetta tässä.

## 2.2. Algebrallisista yhtälöistä

Algebrallisista yhtälöistä

Tarkastellaan yhtälöitä, jotka ovat muotoa

$$P(x) = 0, \tag{2}$$

missä $P$ on polynomi. 1. Jos $\deg(P) = 1$, niin (2) on muotoa

$$ax + b = 0,$$

missä $a$ ja $b$ ovat vakioita. Tällä on 1-käsitteinen ratkaisu $x = -\frac{b}{a}$.

2. Olkoon $\deg(P) = 2$. Silloin (2) on muotoa

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0 \tag{3}$$

missä $a, b, c$ annettuja reaalilukuja.

a) Jos $b^2 - 4ac \geq 0$, niin (3):n ratkaisu on

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Jos $b^2 - 4ac = 0$, on vain yksi ratkaisu $x = -\frac{b}{2a}$, joka on siis $P$:n 2-kertainen 0-kohta.

b) Jos $b^2 - 4ac < 0$, niin (3):llä ei ole reaalisia ratkaisuja. Kompleksiset ratkaisut ovat

$$x = \frac{-b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Ne ovat toistensa liittolukuja.

**Esimerkki.** Tarkastellaan yhtälöä $ax^4 + cx^2 + f = 0$. Kirjoitetaan $x^2 = z$, $x = \pm\sqrt{z}$. Ratkaisu on

$$z = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4af}}{2a},$$

joten alkuperäisen yhtälön ratkaisu on

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4af}}{2a}},$$

kun neliöjuurien alla olevat lausekkeet ovat positiivisia.

**Esimerkki.** Kolmannen asteen yhtälö

$$z^3 + pz + q = 0. \tag{4}$$

missä $p$, $q \in \mathbf{R}$, ratkaistaan Cardanon kaavalla.

Cardanon kaavat antavat yleisen 3:nnen asteen yhtälön algebrallisen ratkaisun:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
z_2 &= \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}, \\
z_3 &= \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Lauseketta $D := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ sanotaan diskriminantiksi. Erotetaan kolme tapausta:

1. $D = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} > 0 \Rightarrow$ (4):llä on 1 reaaliarvoinen ratkaisu, 2 kompleksista ratkaisua, jotka ovat toistensa liittolukuja.

Sisältö:

2. $D = 0$. Ratkaisut ovat

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\sqrt[3]{-q/2} \\ z_2 &= z_3 = -\sqrt[3]{-q/2}, \end{aligned}$$

3. $D < 0$, 3 reaalista ratkaisua.

## 2.3. Rationaalifunktiot

Rationaalifunktiot

Rationaalifunktio R on funktio, joka voidaan esittää muodossa

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

missä $P, Q$ polynomeja ja $x \in \mathbf{R}$, se on määritelty niille $x$, joille $Q(x) \neq 0$.

**Määritelmä.** Jos $x_0$ on $Q$:n nollakohta ja $P(x_0) \neq 0$, niin $x_0$ on $R$:n napa.

### Rationaalifunktion jakaminen osamurtolukuihin

Erotetaan 4 erilaista tapausta.

Tapaus 1. Olkoon $R$ rationaalifunktio, $R = \frac{P}{Q}$, deg $P \geq$ deg $Q$. Haluamme kirjoittaa sen muodossa

$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q} \tag{5}$$

missä $P_1, P_2$ polynomeja joille deg $(P_2) <$ deg $(Q)$. Mutta tämä seuraa jakoyhtälöstä Lause 2.1 (sivu 4).

$$\exists\, A, S \text{ s.e.} \quad P = AQ + S,\ \deg S < \deg Q \Rightarrow R = \frac{AQ+S}{Q} = A + \frac{S}{Q}.$$

saamme esityksen (5) valitsemalla $P_1 = A$, $P_2 = S$.

**Esimerkki.**

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^2}{x-1} \quad (P(x) = x^2, \quad Q(x) = x-1) \\ &= \frac{x^2+1-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \underbrace{x+1}_{P_1} + \underbrace{\frac{a}{x-1}}_{P_2}. \end{aligned}$$

Seuraavassa tarkastellaan rationaalifunktioita, joilla $\deg(P) < \deg(Q)$ $(R = P/Q)$.

Tapaus 2. Oletetaan, että deg $(Q) = n$ ja $Q$:lla on keskenään erisuuret 0-kohdat $x_1, \ldots x_n$. Tällöin $R = \dfrac{P}{Q}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{P}{a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} \quad \in \mathbf{R} \\ &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n} \end{aligned}$$

missä $A_1, \ldots, A_n$ ovat vakioita.

(**Huomautus.** Tämän jälkeen funktion $R$ integrointi on helppoa, sillä

$$\int \frac{A}{x - x_1} = A \log(x - x_1).)$$

Todistetaan väite tapauksessa $n = 2$. Silloin

$$R(x) = \frac{ax + b}{(x - x_1)(x - x_2)}, \quad x_1 \neq x_2$$

halutaan esittää muodossa

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2},$$

missä $A_1, A_2 \in \mathbf{R}$.

Kirjoitetaan

$$\frac{ax + b}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} \quad \Bigg| \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

minkä tulisi päteä kaikilla $x \in \mathbf{R}$!

Tästä on määrättävä luvut $A_1, A_2$. Poistetaan nimittäjät $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & ax + b = A_1(x - x_2) + A_2(x - x_1) \\ \iff \quad & ax + b = (A_1 + A_2)x - A_1 x_2 - A_2 x_1 \end{aligned}$$

Tämän tulee päteä kaikille $x \in \mathbf{R}$, joten

$$\begin{cases} a &= A_1 + A_2 \\ b &= -A_1 x_2 - A_2 x_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a &= A_1 + A_2 \\ -b &= A_1 x_2 + A_2 x_1 \end{cases}$$

Saimme siis yhtälöparin tuntemattomille $A_1$ ja $A_2$. Tämän yhtälöparin determinantti on

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 \neq 0.$$

Siten $A_1$ ja $A_2$ voidaan aina ratkaista.□

**Esimerkki 1.** Seuraava menetelmä ei perustu yllä olevaan todistukseen. Määritämme vakiot $A_1, A_2, A_3$ siten että

$$R(x) := \underbrace{\frac{1}{x(x-1)(x+1)}} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}, \tag{6}$$

missä

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$

on annettu rationaalifunktio, deg $P = 0$, deg $Q = 3$, ja $Q$:lla on $0$-kohdat $0, 1$ ja $-1$.

Ratkaisu.

1. Kerrotaan (6) puolittain "1. nimittäjällä"$x$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = A_1 + x\frac{A_2}{x-1} + x\frac{A_3}{x+1}.$$

2. Asetetaan $x = 0$ ($Q$:n vastaava 0-kohta)

$$\frac{1}{(0-1)(0+1)} = A_1 + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad A_1 = -1.$$

3. Sijoitetaan (6):een $A_1 = -1$ ja kerrotaan "2:lla nimittäjällä"$x - 1$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x}(x-1) + A_2 + \frac{A_3}{(x+1)}(x-1).$$

4. Sijoitetaan $x = 1$ ("$Q$:n 2. 0-kohta")

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 0 + A_2 + 0 \Longrightarrow A_2 = \frac{1}{2}.$$

5. Sijoitetaan (6):een $A_2 = \frac{1}{2}$; kerrotaan (6) "3. nimittäjällä"$x + 1$

$$\frac{1}{x(x-1)} = (x+1)\frac{-1}{x} + (x+1)\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + A_3.$$

6. Sijoitetaan $x = -1$.

$$\frac{1}{-1 \cdot (-2)} = A_3 \Longrightarrow A_3 = \frac{1}{2}.$$

Vastaus:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1},$$

joka pätee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ poislukien nimittäjän nollakohdat. Edelleen

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = -\log|x| + \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + C = \frac{1}{2}\log\frac{|x^2-1|}{x^2} + C.$$

**Esimerkki 2.** Määrää $A_1, A_2, A_3$ ja $A_4$ siten, että

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{(x-3)} + \frac{A_4}{(x-4)}. \tag{7}$$

$1^\circ$ $A_1$: kerrotaan $x-1$:lla:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)(x-4)} = A_1 + (x-1)(\dots) \quad \text{(sijoitetaan } x = 1 \Rightarrow \text{)}$$

$$\frac{1}{(1-2)(1-3)(1-4)} = A_1 \Longrightarrow A_1 = \tfrac{-1}{2\cdot 3} = -\tfrac{1}{6}$$

$2^\circ$ $A_2$: kerrotaan (7) $x-2$:lla

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)(x-4)} = A_2 + (x-2)(\dots) \quad \text{(sijoitetaan } x = 2 \Rightarrow \text{)}$$

$$\frac{1}{1\cdot(-1)\cdot(-2)} = A_2 \Longrightarrow A_2 = \tfrac{1}{2}$$

$3^\circ$ $A_3$: kerrotaan (7) $x-3$:lla

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)} = A_3 + (x-3)(\dots) \quad \text{(sijoitetaan } x = 3 \Rightarrow \text{)}$$

$$\frac{1}{2\cdot 1\cdot(-1)} = A_3 \Longrightarrow A_3 = -\tfrac{1}{2}$$

Sisältö:

4° $A_4$: kerrotaan (7) $x - 4$:lla

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= A_4 + (x-4)(\ldots) \quad \text{(sijoitetaan } x = 4 \Rightarrow \text{)} \\ \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} &= A_4 \Longrightarrow A_4 = \tfrac{1}{6}\end{aligned}$$

Siis,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{6}\frac{1}{x-4}$$

$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$.

Tapaus 3. Jos $Q$ jakautuu reaalisiin 1. asteen tekijöihin, joiden joukossa on moninkertaisia, on näitä vastaamaan asetettava niin monta osamurtolukua kuin k.o. tekijän kertaluku osoittaa.

**Esimerkki 1.** Olkoon

$$R(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}.$$

Tällä on kaksinkertainen $0$-kohta $0$ ja yksinkertainen $0$-kohta $1$.

**Huom!** Tätä ei voida kirjoittaa muotoon

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}.$$

Voidaan kuitenkin löytää vakiot $A_1, A_2, A_3$ siten, että

$$R(x) = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1}$$

eli

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \tag{8}$$

1. $A_3$: kerrotaan (8) $x-1$:llä

$$\frac{1}{x^2} = (x-1)\frac{A_1}{x^2} + (x-1)\frac{A_2}{x} + A_3$$

sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_3 = 1$.

2. $A_1$: kerrotaan (8) $x^2$:llä

$$\frac{1}{x-1} = A_1 + \frac{x^2 \cdot A_2}{x} + x^2\frac{A_3}{x-1}$$

sijoitetaan $x = 0$, saadaan $A_1 = -1$.

3. $A_2$:

$$\begin{aligned}
(8) \quad &\iff \quad \frac{1}{x^2(x-1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \\
&\iff \quad \frac{1+x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1} \\
&\iff \quad \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-1}.
\end{aligned}$$

Kerrotaan tämä $x$:llä:

$$\frac{1}{x-1} = A_2 + x\frac{A_3}{x-1}.$$

Sijoitetaan $x = 0$, saadaan $A_2 = -1$.

Vastaus:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Tarkistus:

$$-^{x-1)}\ \frac{1}{x^2} \ -^{x(x-1))}\ \frac{1}{x} + ^{x^2)}\ \frac{1}{x-1}$$

$$= -\frac{x-1}{x^2(x-1)} - \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{x^2}{x^2(x-1)}$$

$$= \frac{-x+1-x^2+x+x^2}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)}$$

**Esimerkki 2.** Etsi luvut $A_1, \ldots, A_5$ siten että

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x+2)^2} + \frac{A_5}{x+2}. \quad (9)$$

1. $A_1$: (9) kerrotaan $(x-1)^3$:lla

$$\frac{1}{(x+2)^2} = A_1 + (x-1)(\ldots)$$

sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_1 = \frac{1}{9}$.

2. $A_2$: Siirretään (9):ssä termi $\frac{A_1}{(x-1)^3}$ vasemmalle puolelle ja sievennetään

$$
{}^{9)}\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} \overset{(x+2)^2)}{-} \frac{1}{9}\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{9-(x+2)^2}{9(x-1)^3(x+2)^2}
$$

$$
= \frac{-x^2-4x+5}{9(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{-(x-1)(x+5)}{9(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2}
$$

Yhtälö (9) saadaan siis muotoon

$$
\frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + A_3 \ldots
$$

kerrotaan $(x-1)^2$:lla

$$
\frac{-x-5}{9(x+2)^2} = A_2 + (x-1)(\ldots)
$$

sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_2 = \frac{-2}{27}$.

3. $A_3$: Tarkastellaan yhtälöä (9). Siirretään $A_1$- ja $A_2$-termit vasemmalle puolelle ja sievennetään

$$
{}^{3)}\frac{-x-5}{9(x-1)^2(x+2)^2} \overset{(x+2)^2)}{+} \frac{2}{27}\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{3(x+5)-2(x+2)^2}{27(x-1)^2(x+2)^2}
$$

$$
= \frac{2(x-1)(x+\frac{2}{7})}{27(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x-1)(x+2)^2}.
$$

Sisältö:

Siis (9) pätee $\iff$

$$\frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A_3}{x-1} + A_4(\dots)$$

kerrotaan $(x-1)^2$:lla

$$\frac{2}{27}\frac{x+\frac{7}{2}}{(x+2)^2} = A_3 + (x-1)\dots$$

sijoitetaan $x = 1$, saadaan $A_3 = \frac{2}{27}\frac{\frac{9}{2}}{3^2} = \frac{1}{27}$.

4. $A_4$: (9) kerrotaan $(x+2)^2$:lla

$$\frac{1}{(x-1)^3} = A_4 + (x+2)(\dots)$$

sijoitetaan $x = -2$, saadaan $A_4 = \frac{-1}{27}$.

5. $A_5$: Siirretään (9):ssä $A_4$-termi vasemmalle puolelle. Tarkastellaan vasenta puolta. (Huom! $A_1, A_2, A_3, A_5$-termit ovat oikealla puolella.)

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+2)^2} + \frac{1}{27}\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{27+(x-1)^3}{27(x-1)^3(x+2)^2}. \tag{10}$$

Tässä

$$27-(x-1)^3 = 27 + x^3 - 3x^3 + 3x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x + 26 = 0$$

Tämä toteutuu kun $x = -2$. Jaetaan polynomi $x^3 - 3x^2 + 3x + 26$ polynomilla $x + 2$, saadaan $x^2 - 5x + 13$.

$$(10) = \frac{x^2 - 5x + 13}{27(x-1)^3(x+2)} = \frac{A_5}{x+2} + \dots$$

kerrotaan $x + 2$:lla ja sijoitetaan $x = -2$, saadaan $A_5 = -\frac{1}{27}$.

Tapaus 4. Jos $Q$ sisältää tekijän $x^2 + px + q$, missä $p, q$ ovat reaalisia kertoimia ja ko. tekijän $0$ -kohdat eivät ole reaalisia, on sitä kohti muodostettava osamurtoluku

$$\frac{A_1 x + A_2}{x^2 + px + q}, \qquad A_1, A_2 \in \mathbf{R} \text{ ovat vakioita.}$$

**Esimerkki.** Kirjoitetaan

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2 x + A_3}{x^2 + 1} \tag{11}$$

missä vakiot $A_1, A_2, A_3$ halutaan saada sellaisiksi että (11) toteutuu kaikilla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

1.$A_1$: kerrotaan (11) polynomilla $x$.

$$\frac{1}{x^2+1} = A_1 + x\frac{A_2 x + A_3}{x^2+1}.$$

Sijoitetaan $x = 0$, saadaan $A_1 = 1$

2. Loput kertoimet ratkaistaan (11):stä sijoittamalla $A_1 = 1$. Saadaan

$$\frac{A_2x + A_3}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)} - \frac{1}{x} = \frac{1-(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{-x^2}{x(x^2+1)} = \frac{-x}{x^2+1}$$

kerrotaan $x^2 + 1$:llä, saadaan

$$A_2x + A_3 = -x.$$

Koska tämän täytyy päteä kaikilla $x \in \mathbf{R}$, saadaan $A_2 = -1$ ja $A_3 = 0$.

**Yhteenveto tapauksista 1-4.** Rationaalifunktio $R = \frac{P}{Q}$ missä $Q$ on tulo muotoa

$$(x-a)^n \quad \text{ja} \quad x^2 + px + q \quad (p^2 - 4q < 0)$$

olevista tekijöistä, voidaan kirjoittaa summana muotoa

$$\frac{1}{(x-a)^k} \quad \text{ja} \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

olevista termeistä.

## 2.4. Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja olkoon $f$ reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty jossain $a$:n punkteeratussa ympäristössä

$$B'(a,r) := B(a,r) \setminus \{a\}$$

Sisältö:

$(B(a,r) = \{y \in \mathbf{R} \mid |y-a| < r\})$. Tässä $r > 0$.

**Määritelmä 2.6** Funktiolla $f$ on pisteessä $a$ raja-arvo $b$, jos jokaista lukua $s > 0$ kohti voidaan löytää sellainen luku $r > 0$ että

$$|f(x) - b| < s \tag{12}$$

kaikille $x$, jotka toteuttavat $|x-a| < r$.Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Ajattelutapa: $f$:n raja-arvo on $b$, jos "$f(x)$ on lähellä $b$:tä"kunhan "$x$ on riittävän lähellä $a$:ta".

**Esimerkki 1.**

Olkoon $f(x) = 18 \; \forall x \in \mathbf{R}$ ja olkoon $a = -7$. Osoita , että

$$\lim_{x \to -7} f(x) = 18.$$

Ratkaisu. Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Tarkastellaan lauseketta

$$|f(x) - b| = |18 - 18| = 0.$$

Tämä on kaikille $x \in \mathbf{R}$ pienempi kuin $s$ (koska $s > 0$). Valitaan esimerkiksi $r = 1$. Jos $|x - (-7)| < r$, niin $|f(x) - 18| < s$.

**Esimerkki 2.** Olkoon $f(x) = x^2$, $a = 10$. Osoita, että

$$\lim_{x \to 10} f(x) = 100,$$

kun $s > 0$ on annettu.

*Todistus.* 1. Tarkastellaan lauseketta

$$\begin{aligned} |f(x) - 100| &= |x^2 - 100| = |x^2 - 10^2| \\ &= |(x-10)(x+10)| = |x-10||x+10| \end{aligned} \tag{13}$$

Yleensä pyritään kirjoittamaan/arvioimaan ylhäältä lauseketta

$$|f(x) - 100|$$

muodossa

$$|x - 10| \cdot \text{jotakin}.$$

2. Merkitään "jotakin"$=$ $A(X)$. Käyttäen tietoa, että $x$ on lähellä pistettä $a$ (voidaan esimerkiksi aina olettaa että $|x - a| < 1$) pyritään löytämään yläraja $M$ lausekkeelle $A(x)$. Nyt

$$A(x) = |x + 10|.$$

Pätee myös

$$|x - a| = |x - 10| < 1.$$

Näin ollen $x \in \,]9, 11[$, joten $A(x) \leq 30$ (yhtä hyvin 100, 500, tms.). Oletetaan $M = 30$.

3. Valitaan

$$r = \frac{s}{M+1} \left( \text{tai } r = \frac{s}{M+1000}, r = \frac{s}{10M+10^6} \dots \right)$$

4. Todetaan että Määritelmä 2.6 (sivu 23) toteutuu: Jos $|x-10| < r$, niin

$$\begin{aligned} |f(x) - 100| &< |x-10||x+10| \\ &< r \cdot M = \tfrac{s}{r+1} \cdot M = s \underbrace{\frac{M}{M+1}}_{<1} < s, \end{aligned}$$

kohdan (13) perusteella $|f(x) - 100| < s$. $\square$

**Esimerkki 3.** Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \text{ on rationaalinen} \\ 0, & x \text{ on irrationaalinen.} \end{cases}$$

Väite:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

*Todistus.* Olkoon $s > 0$.

1. Tarkastellaan lauseketta

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \begin{cases} |x|^3, & \text{kun } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}.$$

Siis aina

$$|f(x) - 0| \leq |x^3| = |x||x|^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

2. Tämä on muotoa $|x - 0| \cdot A(x)$, missä $A(x) = |x|^2$. Jos esim. $|x - 0| < 1$, niin $|A(x)| < 10 =: M$.

3. Valitaan $r := \min\left(\frac{s}{M+1}, 1\right)$.

4. Näytetään, että Määritelmä 2.6 (sivu 23) pätee: Jos $|x - 0| < r$, niin

$$|f(x) - 0| \leq |x|^3 = |x| \cdot A(x) < r \cdot M \leq \frac{s}{M+1} \cdot M = s\frac{M}{M+1} < s$$

□

**Lause 2.7** Jos funktiolla $f$ on raja-arvo pisteessä $a$, niin silloin kaikille $s > 0$ voidaan löytää $r > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| < s, \quad \text{kun } |x - a| < r \text{ ja } |y - a| < r. \tag{14}$$

Tätä lausetta voidaan käyttää, kun osoitetaan, että funktiolla ei ole raja-arvoa jossakin pisteessä.

**Esimerkki.** Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kun } x > 10 \\ 1, & \text{kun } x \leq 10 \end{cases}.$$

Väite: $f$:llä ei ole raja-arvoa pisteessä $x = 10$.

*Todistus.* Olkoon $s = \frac{1}{2}$ ja $r > 0$. Valitaan $x$ siten, että

$$10 - r < x < 10,$$

mistä seuraa

$$|x - 10| < r.$$

Ja $y$ siten, että

$$10 < y < 10 + r,$$

mistä seuraa

$$|y - 10| < r.$$

Nyt

$$|f(x) - f(y)| = |1 - 3| = 2 > s.$$

Näin ollen Lause 2.7 (sivu 26) ei toteudu; ei ole raja-arvoa. $\square$

Kun halutaan osoittaa määritelmän 2.6. avulla, että

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

niin tutkitaan lauseketta $|f(x) - b|$ ja pyritään estimoimaan sitä (kun $x \approx a$, esim. $x \in \,]a - 1, a + 1]$ eli $|x - a| < 1$) lausekkeella

$$|x - a| \cdot \text{jotakin}$$

missä "jotakin"on rajoitettu ($\leq M$, ei riipu $x$:stä).

**Esimerkki 1.** Olkoon $f(x) = x^3 - 10\pi x$. Osoita, että

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 27 - 30\pi.$$

Pätee

$$\begin{aligned}
|f(x) - (27 - 30\pi)| &= |\underbrace{x^3 - 10\pi x}_{f} - \underbrace{(27 - 30\pi)}_{\text{raja-arvo}}| \\
&= |\underbrace{x^3 - 3^3} - \underbrace{10\pi x + 30\pi}| \\
(\triangle\text{-ey}) \quad &\leq |x^3 - 3^3| + |-10\pi x + 30\pi| \\
&= |(x-3)(x^2 + 3x + 5)| + |\underbrace{-10\pi x + 10\pi \cdot 3}_{10\pi(3-x)}| \\
&\leq |x-3||x^2 + 3x + 5| + 10\pi|3 - x| \\
&= |x-3| \underbrace{\left(|x^2 + 3x + 5| + 10\pi\right)}_{=:A(x)}.
\end{aligned}$$

Arvioidaan lauseketta $A(x)$ kun $x$ on lähellä tarkastelupistettä, esimerkiksi kun

$$|x - 3| < 1 \text{ eli } x \in \,]2, 4[\,.$$

Sisältö:

Tällöin

$$A(x) \leq |x^2| + |3x| + |5| + 10\pi \leq 16 + 12 + 5 + 10\pi \leq 100.$$

Olkoon $s > 0$. Valitaan $r = \min\left(\frac{s}{100}, 1\right)$. Silloin

$$|f(x) - b| = |f(x) - (27 - 30\pi)| \leq |x - 3| \cdot 100 < r \cdot 100 \leq \frac{s}{100} \cdot 100 = s,$$

jos $|x - 3| < r$.

**Esimerkki 2.** Osoita

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{4}.$$

Pätee

$$\left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4 - x + 1}{4(x-1)}\right| = \left|\frac{5-x}{4(x-1)}\right| = |x-5| \cdot \underbrace{\frac{1}{|4(x-1)|}}_{=:A(x)}$$

Oletetaan, että $x \in B(5,1) = ]4,6[$. Estimoidaan $A(x)$:ää:

$$A(x) = \frac{1}{|4(x-1)|} \leq \frac{1}{4 \cdot 3} < 1.$$

Olkoon $s > 0$. Siis:

$$|f(x) - \frac{1}{4}| < s,$$

kun valitaan $r = s$ ja $|x - 5| < r$.

**Esimerkki 3.** Olkoon $f(x) = \pi x^3 + \frac{x}{2} + \frac{1}{x+2}$. Osoita, että

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\pi + \frac{1}{2}.$$

Estimoidaan:

$$\begin{aligned} |f(x) - (-\pi + \tfrac{1}{2})| &= \pi x^3 + \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{x+2} - (-\pi - \tfrac{1}{2} + 1)| \\ &= |\pi x^3 + \pi + \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{x+2} - 1| \\ &\leq |\pi x^3 + \pi| + |\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}| + |\tfrac{1}{x+2} - 1| \\ &= \pi|x^3 + 1| + \tfrac{1}{2}|x + 1| + |\tfrac{1-(x+2)}{x+2}| \\ &= \pi|x + 1||x^2 - x + 1| + \tfrac{1}{2}|x + 1| + |x + 1|\tfrac{1}{|x+2|} \\ &= |x + 1| \underbrace{\left(\pi|x^2 - x + 1| + \frac{1}{2} + \frac{1}{|x + 2|}\right)}_{=:A(x)} \end{aligned}$$

Oletetaan, että

$$|x - (-1)| = |x + 1| < 1/2$$

eli $x \in B(-1, \frac{1}{2}) = \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[$. Silloin

$$A(x) \leq \pi(|x^2| + |x| + 1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{|-3/2 + 2|} \leq \pi(\frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1) + \frac{1}{2} + 2 < 30.$$

Olkoon $s > 0$. Valitaan $r = \min(\frac{s}{30}, \frac{1}{2})$. Pätee

$$|f(x) - (-\pi + \frac{1}{2})| < s, \text{ kun } |x - (-1)| < r.$$

Sisältö:

Usein annetun lausekkeen raja-arvo lasketaan käyttäen entuudestaan tunnettuja raja-arvoja ja seuraavaa tulosta:

**Lause 2.9.** Olkoon $f, g$ reaalimuuttujan funktioita, $x_0 \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. Oletetaan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \tag{15}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = b. \tag{16}$$

Silloin pätee:

a) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$

b) $\lim_{x \to x_0} kf(x) = ka$

c) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x)) = ab$

d) jos $b \neq 0$, niin $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

*Todistus.* a) Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Koska (15) ja (16) pätevät, on olemassa $r_1 > 0$ siten että

$$|f(x) - a| < \frac{r}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < r_1$$

ja $r_2 > 0$ siten että

$$|g(x) - b| < \frac{s}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < r_2.$$

Valitaan

$$r = \min(r_1, r_2) > 0.$$

Olkoon $|x - x_0| < r$. Pätee

$$|f(x)+g(x)-(a+b)| \leq |f(x)-a+g(x)-b| \leq |f(x)-a|+|g(x)-b| < \frac{s}{2}+\frac{s}{2} = s.$$

$\square$

**Esimerkki 1.** Lasketaan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$$

kun $a > 0$ on jokin vakio.

Osoitetaan ensin, että

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{a+x} = \sqrt{a}.$$

*Todistus.* Olkoon $s > 0$ mielivaltainen. Valitaan $r = \sqrt{a} \cdot s$. Oletetaan, että $|x| < r$. Silloin

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{a+x}-\sqrt{a}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})(\sqrt{a+x}-\sqrt{a})}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}\right| \\ &= \left|\frac{a+x-a}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}\right| \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} < \frac{|x|}{\sqrt{a}} < \frac{r}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\cdot s}{\sqrt{a}} = s. \quad \square \end{aligned}$$

Pätee

$$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}$$

Lauseesta 2.9 (sivu 31) seuraa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} = \frac{\lim_{x\to 0} 1}{(\lim_{x\to 0}\sqrt{a+x})+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

□

**Esimerkki 2.** Laske

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}},$$

missä $a, b > 0$ ovat vakioita.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{\sqrt{b+x}-\sqrt{b}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{b+x}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{2\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}.
\end{aligned}$$

**Määritelmä 2.10.** Olkoon $f$ määritelty välillä $]y, a[$, missä $y < a$. $f$:llä on vasemmanpuoleinen raja-arvo $b$ pisteessä $a$, jos kaikille $s > 0$ löytyy $r > 0$ siten että

$$|f(x) - b| < s, \text{ kun } a - r < x < a.$$

Merkitään

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b.$$

Sanoin: Olkoon $f$ määritelty välillä $]a, y[$, missä $y > a$. $f$:llä on oikeanpuoleinen raja-arvo $b$ pisteessä $a$, jos kaikille $s > 0$ löytyy $r > 0$ siten että

$$|f(x) - b| < s, \text{ kun } a < x < a + r.$$

Merkitään

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b.$$

**Lause 2.11.** Olkoon $a \in \mathbf{R}$, ja olkoon $f$ määritelty jossain $a$:n punkteeratussa ympäristössä. Funktiolla $f$ on raja-arvo $b$ pisteessä $a$, jos

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b = \lim_{x \to a+} f(x).$$

**Määritelmä 2.12.** Oletetaan, että $f$ on määritelty jollain välillä $]c, \infty[$. Sanomme, että $f$:llä on pisteessä $\infty$ raja-arvo $b$, jos kaikille $s > 0$ voidaan löytää $M > 0$ siten, että

$$|f(x) - b| < s,$$

aina kun $x$ toteuttaa ehdon $x > M$ ("$f(x)$ poikkeaa $b$:stä vain vähän, kun $x$ on suuri").

Vastaavasti määritellään raja-arvo pisteessä $-\infty$. Oletetaan että $f$ on määritelty välillä $]-\infty, c[$, $c \in \mathbf{R}$. Raja-arvo on $b$, jos $\forall\ s\ \exists\ M > 0$ siten, että $|f(x) - b| < s$ kun $x < -M$.

**Määritelmä 2.13.** Oletetaan, että $a \in \mathbf{R}$ ja $f$ on määritelty jossain $a$:n punkteeratussa ympäristössä. Sanomme, että $f$:llä on raja-arvo $\infty$ pisteessä $a$, jos kaikille $M > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) > M$, kun $x$ toteuttaa ehdon $|x - a| < r$. Vastaavasti raja-arvo on $-\infty$, jos kaikille $M > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) < -M$, kun $x$ toteuttaa ehdon $|x - a| < r$.

**Harjoitustehtävä.** Määrittele

1. vasemman- ja oikeanpuoleinen raja-arvo $\infty$ tai $-\infty$ pisteessä $a$.
2. määrittele raja-arvo $\infty$ pisteessä $\infty$.

**Esimerkki 1.** Olkoon

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}.$$

Tutki $f$:n toispuoleisia raja-arvoja $0$:ssa.

Ratkaisu. Oikeanpuoleinen: Olkoon $x > 0$. Tällöin

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = 1$$

ja

$$\lim_{x \to 0+} 1 = 1.$$

Samoin, jos $x < 0$, pätee

$$f(x) = \frac{x}{-x} = -1$$

ja

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1.$$

Siis, vasemmanpuoleinen raja-arvo on -1 ja oikeanpuoleinen raja-arvo on 1; raja-arvoa pisteessä 0 ei ole.

**Esimerkki 2.** Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{|x+3|}, \quad f : \mathbf{R} \setminus \{-3\} \to \mathbf{R}.$$

Väite: Pisteessä $-3$ raja-arvo on $\infty$.

*Todistus.* Olkoon $M > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että jos $|x-(-3)| < r$, niin $f(x) > M$. Valitaan $r$:ksi joku luku joka on pienempi kuin $\frac{1}{M}$, esimerkiksi $r = \frac{1}{2M}$. Jos nyt $|x+3| < r$, niin

$$f(x) = \frac{1}{|x+3|} > \frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2M}} = 2M > M.$$

$\square$

**Esimerkki 3.** Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{x^2+\pi} + 2.$$

Väite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2.$$

*Todistus.* Olkoon $s > 0$. On löydettävä $M > 0$ siten, että $|f(x) - 2| < s$, kun $x > M$.

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{x^2+\pi}.$$

Olkoon esim. $x > 10$. Tällöin

$$\frac{1}{x^2+\pi} < \frac{1}{10x+\pi} < \frac{1}{10x} < \frac{1}{x}.$$

Jos $M > \max(10, \frac{1}{s})$ ja $x > M$, niin

$$|f(x) - 2| < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} < \frac{1}{\frac{1}{s}} = s.$$

$\square$

**Esimerkki 4.** Vastaavasti osoitetaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

**Esimerkki 5.** Olkoot $m$ ja $n$ luonnollisia lukuja. Määrää

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0},$$

missä $a_j$, $j = 0, \ldots, m$ ja $b_j$, $j = 0, \ldots, n$ ovat reaalisia vakioita ja $a_m \neq 0 \neq b_n$.

a) Tapaus $n < m$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \cdots &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^m(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m})}{x^n(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n})} \\ &= \lim_{x\to\infty} x^{m-n} \frac{a_m + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} \end{aligned} \tag{17}$$

Käytetään apuna seuraavia päteviä tuloksia niitä tässä todistamatta:

- jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = a(\neq 0, \in \mathbf{R})$

  niin $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty$

- jos $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ ja $\lim_{x\to\infty} g(x) = b$

  niin $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = ab$

Kaavassa (17)

$$\lim_{x\to\infty} x^{m-n} = \infty$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n} (\in \mathbf{R}, \neq 0).$$

Tuloksen (2.4) nojalla raja-arvo on $\infty$.

b) Tapaus $n = m$

$$\lim_{x\to\infty} \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n}$$

c) Tapaus $n > m$

$$\lim_{x\to\infty} \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-m}} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}}$$

Tässä

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-m}} = 0,$$

Sisältö:

ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_m}{b_n} \in \mathbf{R}.$$

Tuloksen (2.4) nojalla raja-arvo on $0$.

**Esimerkki 6.** Laske

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$$

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} 2\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} 2\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{x}} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)}{(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1)} \\
= \ & \lim_{x\to\infty} 2\cdot\tfrac{2}{2} = 2.
\end{aligned}
$$

**Määritelmä 2.14.** Olkoon $a \in \mathbf{R}^2$, ja $f$ määrätty jossain $a$:n ympäristössä. Silloin $f$ on jatkuva pisteessä $a$, jos

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

on olemassa ja
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
Toisin sanoen, $f$ on jatkuva pisteessä $a$, jos mielivaltaisella $s > 0$ on olemassa $r > 0$ siten, että
$$|f(x) - f(a)| < s,$$
kun $|x-a| < r$. Jos $f$ ei ole jatkuva $a$:ssa, sanotaan että se on epäjatkuva.

**Esimerkki 1.** Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{kun } x \geq 3 \\ 1, & \text{kun } x < 3 \end{cases}.$$
Pisteessä 3:
$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} 1 = 1, \quad \lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+} x^2 = 9.$$
Näin ollen $f$:llä ei ole raja-arvoa pisteessä 3, joten se ei ole jatkuva.

**Esimerkki 2.** Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{kun } x \neq 1 \\ 8, & \text{kun } x = 1 \end{cases}.$$
Tällöin pisteessä 1:
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x-5 = -3.$$
Pätee
$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1),$$

joten $f$ ei ole jatkuva.

**Määritelmä.** Sanomme, että $f$ on jatkuva välillä $]a,b[$, $a<b$, jos $f$ on jatkuva jokaisessa välin pisteessä.

**Esimerkki 3.** Määrätään $f$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \text{ rationaalinen} \\ 0, & \text{kun } x \text{ irrationaalinen} \end{cases} .$$

Tällä ei ole raja-arvoa missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$, siis $f$ ei ole jatkuva missään pisteessä $x \in \mathbf{R}$.

**Esimerkki 4.**

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \text{ rationaalinen} \\ 0, & \text{kun } x \text{ irrationaalinen} \end{cases} .$$

Tällöin pätee

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad f(0) = 0.$$

Näemme että, $f$ on jatkuva pisteessä $0$. Voidaan osoittaa, että se ei ole jatkuva missään muussa pisteessä.

Heuristinen selitys: "Pomppiminen vaimenee, kun $x \to 0$".

**Esimerkki 5.** Näytä jatkuvuuden määritelmän perusteella, että

$$f(x) = \frac{1}{x} - 3x^2$$

on jatkuva pisteessä $2$.

Ratkaisu. Olkoon $s > 0$. On löydettävä $r > 0$ siten, että

$$|f(x) - (\frac{1}{2} - 12)| < s, \text{ kun } |x - 2| < r.$$

$1°$ Tutkitaan lauseketta

$$|f(x) + \frac{23}{2}| \quad \text{eli} \quad |\frac{1}{x} - 3x^2 + \frac{23}{2}|;$$

pyritään estimoimaan lausekkeella $|x - 2| \cdot A(x)$, missä $|A(x)|$ rajoitettua, kun esim. $|x - 2| < 1$, eli $x \in \,]1, 3[$.

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
|\tfrac{1}{x} - 3x^2 - (\tfrac{1}{2} - 12)| &= |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2} - 3x^2 + 12| \\
(\triangle\text{-ey}) \quad &= |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2}| + |-3x^2 + 3 \cdot 2^2)| \\
&= |\tfrac{2-x}{2x}| + |3(2^2 - x^2)| \\
&= |x - 2| \cdot \tfrac{1}{|2x|} + 3|2 - x||2 + x| \\
&= |x - 2| \cdot \left[\tfrac{1}{|2x|} + 3|2 + x|\right] \\
(x \in \,]1, 3[) \quad &\le |x - 2| \cdot \left[\tfrac{1}{2} + 15\right] \\
&\le |x - 2| \cdot 30
\end{aligned}$$

$2^\circ$ Oletetaan $r = \frac{s}{30}$. Jos $|x-2| < r$, niin

$$|x-2| < \frac{s}{30} \Rightarrow |f(x) - (\frac{1}{2} - 12)| < s \quad \square$$

**Määritelmä 2.15.** $f$ on oikealta jatkuva pisteessä $a$, jos

$$f(a) = \lim_{x \to a+} f(x).$$

Samoin, $f$ on vasemmalta jatkuva pisteessä $a$, jos

$$f(a) = \lim_{x \to a-} f(x).$$

**Määritelmä.** Olkoon $U \subset \mathbf{R}$ avoin osajoukko. $f$ on jatkuva $U$:ssa, jos se on jatkuva jokaisessa $U$:n pisteessä.

**Määritelmä 2.16.** Olkoon $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ annettu. Se on jatkuva välillä $[a,b]$, jos se on jatkuva kaikissa $x \in\, ]a,b[$ ja lisäksi oikealta jatkuva $a$:ssa ja vasemmalta jatkuva $b$:ssä.

Edelleen, $f$ on paloittain jatkuva $[a,b]$:ssä jos $f$ on jatkuva k.o. välillä lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä, joissa sillä on vasemman ja oikeanpuoleiset äärelliset raja-arvot. Lisäksi $f$:n tulee olla $a$:ssa oikealta jatkuva, $b$:ssä vasemmalta jatkuva.

**Esimerkki.** Olkoon $a \in \mathbf{R}$ ja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{kun } x \leq 1 \\ x + a, & \text{kun } x > 1 \end{cases} .$$

Tehtävänä on määrätä $a$ siten, että $f$ on jatkuva $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}&f(1) = 2\\ &\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x^2 + 1 = 2\\ &\lim_{x\to 1+} f(x) = 1 + a\end{aligned}$$

Valitaan $a = 1$, jolloin

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1).$$

Tällä valinnalla $f$ on jatkuva (koko $\mathbf{R}$:ssä).

**Esimerkki.** Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kun } x \le a \\ 1 - x^2, & \text{kun } x > a \end{cases}.$$

Haluamme valita luvun $a$ siten, että $f$ on jatkuva ($\mathbf{R}$:ssä). Pätee

$$\begin{aligned}&f(a) = a - 1\\ &\lim_{x\to a-} f(x) = a - 1\\ &\lim_{x\to a+} f(x) = 1 - a^2\end{aligned}.$$

Näin olen $f$ on jatkuva kun $a$ valitaan siten, että

$$\begin{aligned}&a - 1 = 1 - a^2\\ \iff\ &a^2 + 2 - 2 = 0\\ \iff\ &a = 1 \bigvee a = -2.\end{aligned}$$

Sisältö:

**Lause 2.17.** Jos $f$ ja $g$ ovat jatkuvia pisteessä $a$ (avoimessa joukossa $U$), niin funktiot $f + g$ ja $f \cdot g$ ovat jatkuvia $a$:ssa ($U$:ssa).

Jos lisäksi $g$ on $\neq 0$ pisteessä $a$ (joukossa $U$) niin $\frac{f}{g}$ on jatkuva pisteessä $a$ (joukossa $U$).

*Todistus.* Lause 2.9 (sivu 31). □

**Seuraus.** Polynomit ovat jatkuvia.

**Lause 2.18.** Jos $f$ on jatkuva ja $g$ on epäjatkuva pisteessä $a$, niin $f + g$ on epäjatkuva.

*Todistus.* Jos $f + g$ olisi jatkuva, niin

$$g = f + g - f = \underbrace{f + g}_{\text{jva}} + \underbrace{(-f)}_{\text{jva}}$$

on jatkuva, ristiriita. □

**Lause 2.19.** Jos $f$ on jatkuva ja $\neq 0$ pisteessä $a$ ja $g$ on epäjatkuva, niin $fg$ on epäjatkuva.

*Todistus.* Jos $fg$ olisi jatkuva, niin myös $g$ olisi:

$$g = \frac{g}{f} \cdot f = \frac{\overbrace{gf}^{\text{jva}}}{\underbrace{f}_{\text{jva}}}.$$

□

Sisältö:

**Esimerkki.** Oletetaan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ 10, & x < 3 \end{cases}.$$

Molemmat ovat epäjatkuvia pisteessä $x = 3$, Mutta

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 3 \\ 10, & x < 3 \end{cases}$$

on jatkuva.

**Esimerkki.** Oletetaan

$$f(x) = (x-2)^2, \quad g(x) = \begin{cases} 32, & x > 2 \\ -32, & x < 2 \end{cases},$$

missä $g$ on epäjatkuva. Mutta $fg$ on jatkuva:

$$\lim_{x \to 2+} (x-2)^2 \cdot 32 = 0, \quad \lim_{x \to 2-} (x-2)^2 \cdot (-32) = 0.$$

**Lause 2.20.** Oletetaan että $f$ ja $g$ ovat jatkuvia pisteessä $a$. Silloin

$$x \mapsto |f(x)| \quad \text{ja} \quad x \mapsto \max(f(x), g(x))$$

ovat jatkuvia.

*Todistus.* Olkoon $s > 0$ annettu, $f$ jatkuva $a$:ssa. Voidaan löytää $r > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \frac{s}{2}, \text{ kun } |x-2| < r.$$

Osoitetaan, että

$$\Big| |f(x)| - |f(a| \Big| < s.$$

Mutta nyt pätee

$$\Big| |f(x)| - |f(a| \Big| \overbrace{\leq}^{\triangle\text{-ey}} |f(x) - f(a)| < \frac{s}{2} < s, \text{ kun } |x - a| < r.$$

Samoin

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(|f - g| + f + g)$$

on jatkuva. $\square$

## 2.5. Trigonometriset funktiot

Trigonometriset funktiot

Funktiot $\sin \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $\cos \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ voitaisiin määritellä sarjoilla

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Koska emme vielä ole perehtyneet sarjateoriaan, asiaan palataan Analyysi III:ssa.

Edellä mainituista kaavoista voidaan johtaa seuraavat perusominaisuudet:

1° $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

2° $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3° Yhteenlaskukaavat:

- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4° $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

### Geometrinen tulkinta

Voidaan osoittaa:

$$\sin \theta = \text{kehäpisteen } y\text{-koordinaatti}$$

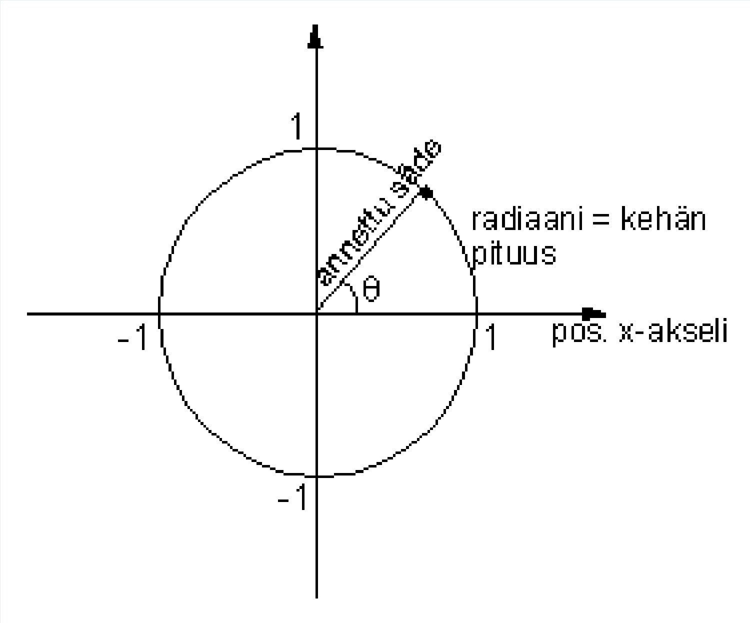
$$\cos \theta = \text{kehäpisteen } x\text{-koordinaatti}$$

kun $\theta \in [0, 2\pi]$ on kulma radiaaneissa (katso Kuvat (1) ja (2)).

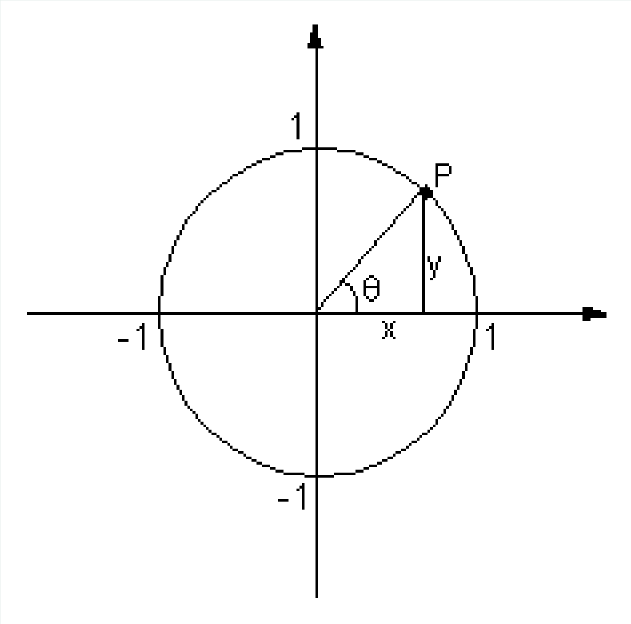
Toinen geometrinen tulkinta: Suorakulmaisessa kolmiossa (katso Kuva (3))

$$\sin \theta = \frac{b}{a}$$

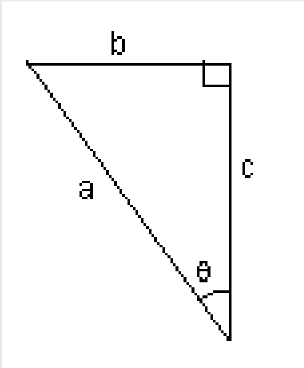
$$\cos \theta = \frac{c}{a}$$




Kuva 1: Geometrinen tulkinta ympyrässä




Kuva 2: Geometrinen tulkinta ympyrässä




Kuva 3: Geometrinen tulkinta kolmiossa

**Lause 2.21.** Funktiot sin ja cos ovat $2\pi$-jaksollisia, eli

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x.$$

Lisäksi

- $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbf{R}$
- $\sin 0 = 0 = \sin \pi$,

  $0 < \sin x$, kun $0 < x < \pi$

  $0 > \sin x$, kun $\pi < x < 2\pi$
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0 = \cos \frac{3\pi}{2}$,

  $\cos x > 0$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

  $\cos x < 0$, kun $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Nämä voidaan johtaa edellellä mainituista sarjaesityksistä.

**Määritelmä 2.22.** Määritellään seuraavat trigonomiset funktiot:

Tangentti: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Kotangentti: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Sekantti: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$

Kosekantti: $\csc x = \frac{1}{\sin x}, x \neq n\pi \quad n \in \mathbf{Z}$.

Suorakulmaisessa kolmiossa pätee

$$\tan\theta = \frac{b}{c}$$

$$\cot\theta = \frac{c}{b}$$

## Trigonometristen funktioiden ominaisuuksia

**Lause 2.23.** Funktio $\sin$ on pariton, $\cos$ parillinen:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

*Todistus.* Yhteenlaskukaavoista seuraa

$$\sin 0 = \sin(x + (-x)) = \sin x\cos(-x) + \cos x\sin(-x) \tag{18}$$

$$\cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos x\cos(-x) - \sin x\sin(-x). \tag{19}$$

Kerrotaan yhtälö (18) $\sin x \cos x$:llä:

$$0 = \sin^2 x\cos(-x)\cos x + \cos^2 x\sin x\sin(-x) \tag{20}$$

Kaavasta (19) seuraa

$$\cos x \cos(-x) = 1 + \sin x \sin(-x). \tag{21}$$

Sijoitetaan tämä (20):een, saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \sin^2 x(1 + \sin x \sin(-x)) + \cos^2 x \sin x \sin(-x) \\ &= \sin^2 x(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1})(\sin x \sin(-x)) \\ &= \sin^2 x + \sin x \sin(-x) \end{aligned}.$$

Jaetaan $\sin x$:llä (kun $x \neq n\pi$), saadaan

$$0 = \sin x + \sin(-x) \iff \sin(-x) = -\sin x \quad \square$$

Kaava $\cos x = \cos(-x)$ seuraa (18):stä sijoittamalla saatu $\sin(-x) = -\sin x$ ja jakamalla $\sin x$:llä.

Poikkeusarvot $x = n\pi$ jne. hoidetaan "käsityönä". $\square$

**Seuraus.** Funktiot $\tan$, $\cot$ ja $\csc$ ovat parittomia ja $\sec$ parillinen.

**Lause 2.24.** Jos $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, niin

$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

Jos $x \neq n\pi$, niin

$$\cot(x + \pi) = \cot x.$$

*Todistus.*

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+pi)} = \frac{\sin x\cos\pi + \cos x \overbrace{\sin\pi}^{=0}}{\cos x\cos\pi - \sin x \underbrace{\sin\pi}_{=0}} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos\pi}{\cos\pi} = \tan x,$$

$$\cot(x+\pi) = \frac{1}{\tan(x+\pi)} = \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

$\square$

Huomaa myös, että $\sin x = \cos x$, kun $x = \frac{\pi}{4}$. Kaavasta (19) saadaan siten

$$\begin{aligned} & (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 + (\cos\tfrac{\pi}{4})^2 = 1 = (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 + (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 = 2(\sin\tfrac{\pi}{4})^2 \\ \Longrightarrow \quad & (\sin\tfrac{\pi}{4})^2 = \tfrac{1}{2} \Longrightarrow \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Näin ollen:

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \tan\tfrac{\pi}{4} &= 1 = \cot\tfrac{\pi}{4}, \\ \csc\tfrac{\pi}{4} &= \sec\tfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

## Muita kaavoja trigonometrisille funktioille

- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, kun $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$, kun $x \neq n\pi$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

*Todistus.* Yhteenlaskukaavoilla. $\square$

**Lause 2.25.** Funktiot $\sin$ ja $\cos$ ovat jatkuvia.

*Todistus.* Sini: Kaavat

$$\sin 0 = 0 \tag{22}$$

ja

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{23}$$

pätevät. Olkoon $s > 0$. Tällöin (23):sta seuraa, että

$$\exists\, r > 0 \text{ siten, että } |\frac{\sin x}{x} - 1| < s, \text{ kun } |x| < r.$$

Nyt

$$|\sin x| = |\sin x - x + x| \leq |\sin x - x| + |x| = |x| \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| + |x|. \tag{24}$$

Yllä nähtiin, että on olemassa $r' > 0$ siten, että

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq 1, \text{ kun } |x| < r'.$$

Sisältö:

Jos $|x| < r'$, yhtälöstä (24) seuraa

$$|\sin x| \le 2|x|.$$

Tästä seuraa

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Yhtälön (22) ja jatkuvuuden määritelmän nojalla sini on siten jatkuva $0$:ssa.

Edelleen,

$$0 \le 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \le 2x^2, \text{ kun } |x| < r'$$

Siis,

$$0 \le 1 - \cos x \le 2x^2 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0 \quad \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$

Ja $\cos$ on jatkuva pisteessä $0$.

Olkoon $y \in \mathbf{R}$. Yhteenlaskukaavasta saadaan

$$\begin{aligned}
\sin(y + x) &= \sin y \cos x + \cos y \sin x \\
&\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin(y + x) = \lim_{x\to 0}(\sin y \cos x + \cos y \sin x) \\
&= \sin y(\underbrace{\lim_{x\to 0} \cos x}_{=1}) + \cos y(\underbrace{\lim_{x\to 0} \sin x}_{=0}) \\
&= \sin y.
\end{aligned}$$

Siis, sinin raja-arvo pisteessä $y$ 0n $\sin y$. Siksi sini on jatkuva pisteessä $y$. Vastaavasti todetaan kosinin jatkuvuus. $\square$

**Esimerkki 1.** Laske
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}. \tag{25}$$
Pätee
$$\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$$
kaikilla $y \in \mathbf{R}$. Sijoitetaan $y = \frac{x}{2}$, saadaan (25)
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{2},$$
koska
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1.$$
**Esimerkki 2.**
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x \cdot \frac{x}{\sin x} = (\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2})(\lim_{x\to 0} x)(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}) = 0$$
**Esimerkki 3.**
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2$$
**Esimerkki 4.** Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Laske
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\tan x - \sin x}.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\tan x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^k}{\sin x}\frac{\cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\frac{x^2}{1-\cos x}(\cos x)x^{k-3}\\
&= (\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x})(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x})(\lim_{x\to 0}\cos x)(\lim_{x\to 0}x^{k-3})\\
&= 1\cdot 2\cdot 1\cdot \lim_{x\to 0}x^{k-3} = \begin{cases} 0, & k>3\\ 2, & k=3\\ \nexists, & k=2\\ +\infty, & k=1\end{cases}
\end{aligned}$$

## Trigonometrisiä funktioita sisältävistä yhtälöistä

Ratkaisemisessa käyteään trigonometristen funktioiden periodisuutta, yhteenlaskukaavoja ja kekseliäisyyttä.

**Esimerkki 1.** Olkoot $P$ ja $Q$ polynomeja. Ratkaise yhtälö

$$\sin(P(x)) = \sin(Q(x)).$$

Ratkaisu.

$$\left\{\begin{array}{rcl} P(x) &=& Q(x)+2\pi\cdot k,\ \text{jollekin } k\in\mathbf{Z}\\ \text{tai} && \\ P(x) &=& (\pi-Q(x))+2\pi\cdot k,\ \text{jollekin } k\in\mathbf{Z}\end{array}\right. .$$

Yhtälö palautuu siten polynomin $0$-kohtien etsimiseen.

Esim.

$$P(x) = x^2 + 1, \quad Q(x) = 5x + \pi$$

jolloin yhtälö on

$$\sin(x^2 + 1) = \sin(5x + \pi).$$

Sillä on seuraavat ratkaisut:

i)

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 = 5x + \pi + 2\pi \cdot k \\ \iff \quad & x^2 - 5x + 1 - \pi - 2\pi \cdot k = 0 \\ \iff \quad & x = \tfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1 - \pi - 2\pi k)}}{2}. \end{aligned}$$

Tässä oltava $x \in \mathbf{R}$, mikä pätee kun kokonaisluku $k$ toteuttaa

$$25 - 4(1 - \pi - 2\pi k) \geq 0 \quad \text{eli} \quad k \geq \frac{-21 - 4\pi}{8\pi},$$

ii)

$$x^2 + 1 = 5x + \pi + \pi - x + 2\pi \cdot k \iff x^2 - 4x + 1 - 2\pi(k + 1) = 0$$

Tämä ratkaistaan samaan tapaan.

**Huom!** Jos $f$, $g$ ovat mitä tahansa reaalimuuttujan funktioita, yhtälö

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x))$$

Sisältö:

palautuu yhtälöihin

$$f(x) = g(x) + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{ja} \quad f(x) = \pi - g(x) + 2\pi \cdot k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

**Esimerkki 2.** Olkoot $f$, $g$ annettuja funktioita $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Yhtälö

$$\cos(f(x)) = \cos(g(x))$$

toteutuu jos ja vain jos

$$f(x) = g(x) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{tai} \quad f(x) = -g(x) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Samoin

$$\tan(f(x)) = \tan(g(x))$$

$$\iff \begin{cases} f(x) = g(x) + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \\ f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \neq g(x) \quad \forall\, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Samoin

$$\cot(f(x)) = \cot(g(x)).$$

(Harjoitustehtävä.)

**Esimerkki 3.** Olkoon $P(x)$ ja $Q(x)$ polynomeja. Ratkaise yhtälö

$$\tan P(x) = \cot Q(x).$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\tan P(x) = \cot Q(x) \quad &\iff \quad \frac{\sin P(x)}{\cos P(x)} = \frac{\cos Q(x)}{\sin Q(x)} \\
&\iff \quad \sin P(x) \sin Q(x) = \cos Q(x) \cos P(x) \\
&\iff \quad \sin P(x) \sin Q(x) - \cos Q(x) \cos P(x) = 0 \\
&\iff \quad \cos(P(x) + Q(x)) = 0 \\
&\iff \quad P(x) + Q(x) = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ jollekin } k \in \mathbf{Z}
\end{aligned}$$

Tässä $x$ oltava sellainen, että $\tan P(x)$ ja $\cot Q(x)$ ovat määriteltyjä.

**Esimerkki 4.** Ratkaise

$$\cos x \cdot \cos(x+1) = 1. \tag{26}$$

Koska $|\cos x| \leq 1$, (26) toteutuu jos

$$\begin{cases} \cos x &= 1 \\ \cos(x+1) &= 1 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \cos x &= -1 \\ \cos(x+1) &= -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 2\pi \cdot k, k \in \mathbf{Z} \\ x+1 &= 2\pi \cdot n, n \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x &= \pi + 2\pi \cdot k, k \in \mathbf{Z} \\ x+1 &= \pi + 2\pi \cdot n, n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\iff 1 = 2\pi(n-k), n, k \in \mathbf{Z} \quad \text{tai} \quad 1 = 2\pi(n-k)n, k \in \mathbf{Z}.$$

Yhtälö $1 = 2\pi(n-k)$ ei toteudu millään $n, k$

$$\underbrace{\pi}_{\in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}} = \underbrace{\frac{1}{2(n-k)}}_{\in \mathbf{Q}}$$

**Esimerkki 5.**

$$\underbrace{\sin x + \cos(2\pi + x)\cos(x+1)}_{\leq 2} = 3$$

Ei ratkaisua.

## 2.6. Funktioiden yhdistäminen

Funktioiden yhdistäminen

**Esimerkki.** Tarkastellaan funktioita

$$f : x \mapsto \sin^2 x.$$

Funktion $f$ voidaan yhdistää funktioista

$$x \mapsto \sin x \text{ ja } y \mapsto y^2.$$

Vastaavasti $x \mapsto 2^{\sin\sqrt{x}}$ on yhdistetty funktioista

$$x \mapsto \sqrt{x}, y \mapsto \sin y \text{ ja } z \mapsto 2^z.$$

**Määritelmä** Olkoon $A, B, C, \subset \mathbf{R}$, ja $f : A \to B, g : B \to C$. Määritellään yhdistetty kuvaus

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Sisältö:

Funktioiden yhdistäminen on liitännäistä: Olkoot $A, B, C, D \subset \mathbf{R}$, $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$. Silloin pätee

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Näin ollen voidaan merkitä

$$h \circ g \circ f := (h \circ g) \circ f.$$

**Harjoitustehtävä.** Olkoon $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{|x| + 1}$. Laske $f \circ (h + k)$ ja $(g + 2k) \circ f$.

**Lause 2.26.** Oletetaan että $f : A \to B$ on jatkuva pisteessä $a \in A$ ja $g : B \to C$ on jatkuva pisteessä $b := f(a) \in B$. Tällöin $g \circ f$ on jatkuva pisteessä $a$.

*Todistus.* Olkoon $s > 0$. Halutaan löytää luku $r > 0$ siten, että

$$|g \circ f(x) - g \circ f(a)| < s, \text{ kun } |x - a| < r.$$

Koska $g$ on jatkuva $b$:ssä, on olemassa $r' > 0$, jolle

$$|g(x) - g(b)| < s, \text{ kun } |x - b| < r'. \tag{27}$$

Koska $f$ on jatkuva $a$:ssa, on olemassa $r > 0$, jolle

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - b| < r', \text{kun } |x - a| < r. \tag{28}$$

Yhteenveto: jos $|x - a| < r$, niin $|f(x) - b| < r'$. Silloin (27):sta seuraa

$$|g(f(x)) - g(b)| < s \text{ eli } |g \circ f(x) - g \circ f(a)| < s.$$

□

## Iteraatioteoriaa

Olkoon $A \subset \mathbf{R}$, $f : A \to A$. Merkitään

$$f^n(x) := (f \circ f \circ \ldots \circ f)(x) = f(f(f(\ldots f(x)\ldots)))$$

$f$:n n:s iteraatti.

(Huom!

$$f(x)^n = f(x)f(x)\ldots f(x) \neq f^n(x) \quad ).$$

Valitettavasti trigonometrisille funktioille $\sin^2 x = (\sin x)^2$, mikä ei ole sopusoinnussa edellä mainitun yleisen merkinnän kanssa.

**Esimerkki.** $A = \mathbf{R}$ ja $f(x) = x^3 + 1$.

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (x^3+1)^3 + 1 \text{ on 9. asteen polynomi} \\ f(x)^2 &= (x^3+1)^2 \text{ on 6. asteen polynomi.} \end{aligned}$$

Samoin, jos

$$g(x) = \frac{1}{x^2+2},$$

niin

$$g^2(x) = \frac{1}{(\frac{1}{x^2+2})^2 + 2} = \frac{1}{\frac{1}{x^4+4x^2+4} + 2} = \frac{x^4+4x^2+4}{9+2x^4+8x^2}.$$

Tarkastellaan yhtälöä

$$x = f(x), \tag{29}$$

missä $x \in \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Jos tiedetään, että on olemassa suljettu väli

$$B \subset \mathbf{R} \quad (B = [a, b]\,, |a|, |b| < \infty)$$

siten, että $f(B) \subset B$ (eli $f(x) \in B \forall x \in B$) ja on olemassa $0 < c < 1$ siten, että

$$|f'(x)| < c \quad \forall x \in B$$

niin luku

$$y = \lim_{n \to \infty} f^n(x_0) \tag{30}$$

(missä $x_0 \in B$ voidaan valita mielivaltaisesti) on yhtälön (29) ratkaisu. Ratkaisu (30) on yksikäsitteinen välillä $B$.

Tämä tulos on erikoistapaus Boanachin kiintopistelauseesta.

**Esimerkki 1.** Yhtälö

$$\frac{1}{2} \cdot \cos x + x = 0$$

voidaan kirjoittaa muodossa $x = -\frac{1}{2} \cos x$. Siis,

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cos x.$$

Otetaan $B = [-1, 1] \Rightarrow f(B) \subset B$ ja

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \sin x \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B.$$

Yhtälölle on siis yksikäsitteinen ratkaisu välillä $[-1, 1]$.

**Esimerkki 2.** Yhtälön

$$x^8 + \sin x - 4x = 0$$

ratkaisu on $x = \frac{1}{4}(x^8 + \sin x)$.

$$f'(x) = 2x^7 + \frac{1}{4}\cos x.$$

Valitaan $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Jos $x \in B$, niin

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq 2 \cdot \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2} \\ |f(x)| &\leq \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^8 + \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2}, \text{ josta } f(x) \in B. \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa ratkaisu on $x = 0$. Muita ratkaisuja ei ole välillä $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

## 2.7. Käänteisfunktio

Käänteisfunktio

**Lause 2.27** (Bolzanon lause). Olkoon $f$ jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Funktio $f$ saa jokaisen arvon joka on arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välillä. Erityisesti jos $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, niin on olemassa $y \in [a, b]$ jolle $f(y) = 0$.

Tulosta voidaan käyttää yhtälöjen likimääräiseen ratkaisemiseen.

**Esimerkki 1.** Yhtälö

$$P(x) = 0, \tag{31}$$

missä

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 1,$$

pätee

$$P(0) = -1, \quad P(1) = 1.$$

Siis (31):llä on ratkaisu välillä $]0, 1[$. Edelleen

$$\begin{array}{ccccc} P(\frac{1}{2}) & = & \frac{17}{16} & \Rightarrow & \text{ratkaisu } \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \\ P(\frac{1}{4}) & = & \frac{49}{256} & \Rightarrow & \text{ratkaisu } \in \left]0, \frac{1}{4}\right[ \\ P(\frac{1}{8}) & = & -\frac{1567}{1098} & \Rightarrow & \text{ratkaisu } \in \left]\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right[ \\ & \text{jne..} & & & \end{array}$$

**Määritelmä 2.28.** Olkoon $A, B \subset \mathbf{R}$ ja $f : A \to B$ bijektio. Silloin vastaa jokaista $y \in B$ täsmälleen yksi $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Näin tulee määritellyksi funktio $g : B \to A$, $f$:n käänteisfunktio. Se toteuttaa:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= x \quad \forall x \in A \\ f \circ g(x) &= x \quad \forall x \in B. \end{aligned}$$

Yleensä merkitään $g =: f^{-1}$.

**Esimerkki.** Olkoon $f(x) = 2x + 1$. Tämä on bijektio $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Käänteisfunktion lauseke löydetään ratkaisemalla yhtälöstä

$$2x + 1 = y \tag{32}$$

$x$ luvun $y$:n funktiona:

$$(32) \iff 2x = y - 1 \iff x = \frac{y-1}{2}.$$

Siis $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

**Lause 2.29.** Oletetaan, että funktio $f$ toteuttaa:

1° $f$ on jatkuva välillä $\triangle$, missä $\triangle$ on jokin seuraavista: $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b]$, $[a,b[$, $]-\infty,a[$, $]-\infty,a]$, $[a,\infty[$, $]a,\infty[$.

2° $f$ on aidosti kasvava, eli $f(x) > f(y)$, kun $x > y$, $x, y \in \triangle$.

Silloin joukko $\triangle' := f(\triangle) := \{y \mid y = f(x) \text{ jollekin } x \in \triangle\}$ on jotain edellä mainittua tyyppiä, $f$:llä on käänteiskuvaus $f^{-1} : \triangle' \to \triangle$, ja $f^{-1}$ on jatkuva ja aidosti kasvava.

**Huomautus.** Jos $f$ on aidosti vähenevä ($f(x) < f(y)$ kun $x > y$), niin sama pätee, mutta $f^{-1}$ on aidosti vähenevä.

**Huomautus.** Jos $f(x) = x^2$, $\triangle = ]0,\infty[$ niin $f$ on aidosti kasvava. $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{x^2}$ vaan $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Tarkastellaan potenssifunktiota $f(x) = x^n$, missä $n \in \mathbf{N}$. Kun $n = 1$, käänteisfunktiolle pätee $f^{-1}(x) = x = f(x)$.

Olkoon $n \geq 2$. Tarkastellaan tapausta $\triangle = [0,\infty[$. Potenssiinkorotuksen laskusäännöistä seuraa, että $x^n > y^n$ Jos $x > y \geq 0$.

Lauseesta 2.29 (sivu 70) seuraa, että $f$:llä on olemassa käänteisfunktio, jota merkitään $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Koska

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty,$$

pätee $f(\triangle) = [0,\infty[ =: \triangle'$ ja $\sqrt[n]{x}$ on siten määritelty $\forall x \in [0,\infty[$.

Jos lisäksi $n$ on pariton, silloin $f$ on aidosti kasvava myös joukossa $]-\infty, 0]$. Lisäksi

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty.$$

Jos nyt merkitään $\triangle = ]-\infty, \infty[ = \mathbf{R}$, niin $\triangle' := f(\triangle) = \mathbf{R}$. Merkitään edelleen käänteisfunktiota $\sqrt[n]{x}$; kun $n$ on pariton tämä on siis määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$.