Sisältö

3 Derivaatta

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^3$. Sen kuvaaja kulkee pisteiden $(1,1)$ ja $(1+h,(1+h)^3)$ kautta. Niiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{(1+h)^3-1}{h}.$$

Tätä lauseketta sanotaan myös f:n erotusosamääräksi pisteessä 1.

Tutkimme lausekkeen raja-arvoa, kun h lähestyy nollaa. Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(3+3h+h^2) = 3.
\end{aligned}$$

Luku 3 on tangentin kulmakerroin pisteessä 1.

Määritelmä 3.1 Olkoon $x \in \mathbf{R}$ ja f funktio joka on määritelty x:n jossakin ympäristössä. Jos lausekkeella

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on raja-arvo, kun h lähestyy nollaa, tätä raja-arvoa sanotaan f:n derivaataksi pisteessä x.

Merkitään

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Sanotaan myös että tällöin f on derivoituva pisteessä x.

Jos f on derivoituva välin Δ jokaisessa pisteessä, vastaa jokaista $x \in \Delta$ luku $f'(x)$. Näin määritelty kuvaus $f' : \Delta \to \mathbf{R}$ on f:n derivaatta.

Esimerkki Laske funktion $f(x) = x^4$ derivaatta.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3) = 4x^3
\end{aligned}$$

Esimerkki Onko funktio

$$f(x) = |x-1| + \pi$$

derivoituva?

Ratkaisu. Oletetaan että $x < 1$. Tällöin

$$f(x) = 1 - x + \pi$$

ja

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1 - (x+h) + \pi - (1 - x + \pi)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1,\end{aligned}$$

joten f on derivoituva kun $x < 1$.

Oletetaan että $x > 1$. Tällöin

$$f(x) = x - 1 + \pi$$

ja

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1,$$

joten f on derivoituva kun $x > 1$.

Tapaus $x = 1$. Erotusosamäärä pisteessä 1 on

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{|1 + h - 1| + \pi - \pi}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Tämän vasemmanpuoleinen raja-arvo on -1 ja oikeanpuoleinen raja-arvo on 1. Raja-arvoa ei siis ole olemassa, joten f ei ole derivoituva pisteessä 1.

Lause 3.2 Funktiolla f on pisteessä x derivaatta a, jos f:n lisäys voidaan kirjoittaa seuraavasti: Kun h kuuluu johonkin nollan ympäristöön, pätee

$$f(x+h) - f(x) = ah + hg(h), \tag{1}$$

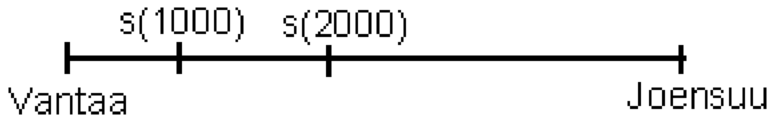
missä a on vakio ja g on funktio joka on määritelty 0:n jossain ympäristössä, g on jatkuva 0:ssa ja $g(0) = 0$.

Todistus. a) Oletetaan että $f'(x) = a$. Määritellään

$$g(h) = \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a, & \text{jos } h \neq 0 \\ 0, & \text{jos } h = 0 \\ . & \end{cases}$$

Koska f on derivoituva, pätee

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \Rightarrow \lim_{h\to 0} g(h) = 0$$



Tästä seuraa, että g on jatkuva 0:ssa (g:n raja-arvo 0:ssa on sama kuin g:n arvo 0:ssa.)

Näin ollen g toteuttaa vaaditut ehdot. Edelleen, kehitelmä (1) toteutuu g:n määritelmän perusteella.

b) Oletetaan että (1) pätee. Tällöin

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a + g(h).$$

Siis,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(a+g(h)) = a + \lim_{h\to 0} g(h).$$

Näin ollen f:n derivaatta pisteessä x on a. $\square$

Termiä a sanotaan f:n differentiaaliksi pisteessä x, merkitään df.

Esimerkki Olkoon $s(t)$ auton sijainti (metreissä) hetkellä t (sekunteja, katso Kuva 3). Tällöin s on reaalimuuttujan t funktio, esimerkiksi $s(t) = 30t$. Auton keskinopeus on määritelmän mukaan ajettu matka jaettuna siihen käytetyllä ajalla. Keskinopeus esimerkiksi aikana $t \in [1000, 2000]$ on siten

$$\frac{s(2000)-s(1000)}{2000-1000} = 30 \text{ (metriä sekunnissa)}.$$

Jos $h > 0$, keskinopeus aikana $t \in [1000, 1000+h]$ on

$$\frac{s(1000+h)-s(1000)}{1000+h-1000} = \frac{30(1000+h)-30\cdot 1000)}{h} = 30.$$

Hetkellinen nopeus, ”nopeusmittarin näyttö”, hetkellä $t = 1000$ on

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(1000+h)-s(1000)}{1000+h-1000} = \lim_{h\to 0} \frac{s(1000+h)-s(1000)}{h} = s'(1000) = 30.$$

Otetaan toinen esimerkki. Oletetaan, että auton sijainti hetkellä t saadaan funktiosta

$$s(t) = \begin{cases} 30t + \sin \pi t, & t < 7000 \\ 30 \cdot 7000, & 7000 < t < 8000 \\ 25t + \sin \pi t, & t > 8000. \end{cases}$$

Nyt keskinopeus aikana $t \in [1000, 2000]$ on

$$\frac{s(2000) - s(1000)}{1000} = \frac{60000 + \sin \pi 2000 + (30000 + \sin \pi 1000)}{1000} = 30$$

ja aikana $t \in [1000, 1000 + h]$

$$\frac{s(1000 + h) - s(1000)}{h}.$$

Hetkellinen nopeus hetkellä $t = 1000$ on nyt

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(1000 + h) - s(1000)}{h} = s'(1000) = 30 + \pi \cos 1000\pi = 30 + \pi \cong 33,1.$$

Lause 3.3 Jos funktiolla f on derivaatta pisteessä x, niin f on jatkuva pisteessä x.

Lause 3.4 Vakiofunktion derivaatta on 0 kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Funktion

$$x \mapsto x^n, \quad n \in \mathbf{N}$$

derivaatta on nx^{n-1}.

Todistus. Todistetaan induktiolla.

1° $n = 1$. Olkoon $x, h \in \mathbf{R}$,

$$(x + h) - x = h.$$

Lauseessa 3.2 (sivu 3) otetaan $a = 1$ ja $g(h) = 0$, joten derivaatta on vakio 1. (Voidaan helposti todistaa myös erotusosamäärän raja-arvon avulla.)

2° Oletetaan, että väite on todistettu funktiolle x^n, siis

$$Dx^n = nx^{n-1}. \tag{2}$$

On osoitettava, että väite pätee myös funktiolle x^{n+1}. Kohdasta (2) seuraa että on olemassa g joka toteuttaa Lauseen 3.2 (sivu 3) oletukset siten, että

$$(x + h)^n - x^n = \underbrace{nx^{n-1}}_{a} h + hg(h).$$

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
(x + h)^{n+1} - x^{n+1} &= (x + h)(x + h)^n - x^{n+1} \\
&= (x + h)(nx^{n-1}h + x^n + hg(h)) - x^{n+1} \\
&= (n + 1)x^n h + h((x + h)g(h) + nx^{n-1}h) \\
&= (n + 1)x^n h + h\widetilde{g}(h),
\end{aligned}$$

missä on merkitty $\widetilde{g}(h) = (x+h)g(h) + nx^{n-1}h$. Tässä

$$\lim_{h\to 0} \widetilde{g}(h) = 0,$$

yllä olevasta kaavasta nähdään, että derivaatta on $(n+1)x^n$. Joten $\widetilde{g}$ toteuttaa Lauseen 3.2 (sivu 3) vaatimukset. $\square$

Lause 3.5 Jos f:llä on derivaatta $f'(x)$ pisteessä x ja $C \in \mathbf{R}$, niin funktiolla Cf on derivaatta $Cf'(x)$ pisteessä x. Samoin, jos g:llä on derivaatta $g'(x)$, niin

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Tästä ilmiöstä käytetään nimitystä, että derivaatta on lineaarinen operaattori ja derivointi on lineaarinen laskutoimitus.

Lause 3.6 Olkoon f ja g kuten Lauseessa 3.5 (sivu 6). Tällöin funktiolla fg on derivaatta

$$f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

pisteessä x. Jos lisäksi $g(x) \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} D\frac{1}{g(x)} &= -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{ja} \\ D\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Todistetaan tässä vain tulon derivointikaava. Olkoon $h \in \mathbf{R}$ riittävän pieni. Merkitään

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+h) - f(x) \\ \Delta g &= g(x+h) - g(x). \end{aligned}$$

Kirjoitetaan tulofunktion fg erotusosamäärä

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ = \quad & \frac{(\Delta f + f(x))(\Delta g + g(x)) - f(x)g(x)}{h} \\ = \quad & \frac{\Delta f \Delta g + \Delta f \cdot g(x) + f(x)\Delta g + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ = \quad & \frac{\Delta f}{h} \cdot \Delta g + \frac{\Delta f}{h} \cdot g(x) + f(x)\frac{\Delta g}{h} \\ \longrightarrow \quad & 0 + f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

kun $h \to 0$.

Derivaatalle on käytössä monia eri merkintöjä, esimerkiksi

$$f'(x) = Df(x) = (Df)(x) = (Df(z))_{z=x} = \frac{df}{d} = \frac{df(x)}{dx}.$$

3.1 Trigonometristen funktioiden derivaatat

Lause 3.7 Koko $\mathbf{R}$:ssä pätee

$$\begin{aligned} D\sin x &= \cos x \\ D\cos x &= -\sin x. \end{aligned}$$

Todistus. Muodostetaan erotusosamäärä

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h} \\ &= \frac{\sin h}{h}\cos x + \sin x\frac{\cos h - 1}{h} \\ &\longrightarrow 1\cdot\cos x + \sin x\cdot 0 = \cos x \end{aligned}$$

kun $h \to 0$. Samoin

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x\frac{\cos h - 1}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h} \\ &\longrightarrow -\sin x \end{aligned}$$

kun $h \to 0$. $\square$

Näistä seuraa soveltamalla lausetta 3.6 (sivu 6).

$$\begin{aligned} D\tan x &= 1 + \tan^2 x \\ D\cot x &= -(1+\cot^2 x) \end{aligned}$$

Lause 3.8 Olkoon f määritelty pisteen x eräässä ympäristössä $B(x,h)$ ($h > 0$) ja oletetaan, että f on derivoituva pisteessä x. Olkoon g määritelty pisteen $y := f(x)$ ympäristössä $B(y,s)$ ($s > 0$) ja oletetaan että g on derivoituva pisteessä y. Silloin yhdistetty funktio $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x ja

$$D(g\circ f)(x) = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Todistuksen idea:

- Käytetään Lausetta 3.2 (sivu 3) g:lle.
- Muodostetaan erotusosamäärä $g \circ f$ ja käytetään yhtälöä (1).

Esimerkki Derivoi funktio $\sin(x^2)$. Tämä on yhdistetty funktioista

$$g : x \mapsto \sin x, \quad \text{ja} \quad f : x \mapsto x^2.$$

Siis,

$$\sin(x^2) = g \circ f(x).$$

Lauseen 3.8 (sivu 7) mukaan pätee

$$D\sin(x^2) = g'(g(x)) \cdot f'(x) = \cos(f(x)) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2).$$

Esimerkki Derivoi

$$e^{x^3 - \cos x} =: \exp(x^3 - \cos x).$$

Tämä on yhdistetty funktioista

$$g : x \mapsto \exp(x) \quad \text{ja} \quad f : x \mapsto x^3 - \cos x,$$

eli $\exp(x^3 - \cos x) = g \circ f(x)$. Siis

$$\begin{aligned} D\exp(x^3 - \cos x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = \exp(f(x)) \cdot (3x^2 + \sin x) \\ &= (3x^2 + \sin x)e^{x^3 - \cos x}. \end{aligned}$$

Huomautus Oletetaan että on annettu funktiot $f_1, \ldots, f_n$. Oletetaan että

f_1 on määritelty pisteen x ympäristössä ja derivoituva pisteessä x.

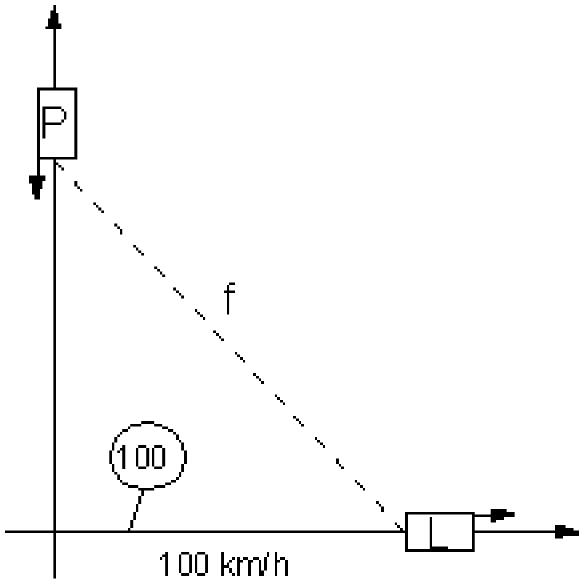
f_2 on määritelty pisteen $f_1(x)$ ympäristössä ja derivoituva siinä, jne...

Silloin n:n yhdistetyn funktion derivointikaava on

$$\begin{aligned} & D\Big(f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1\Big)(x) \\ = \; & f_n'\Big(f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1(x)\Big) \cdot f_{n-1}'\Big(f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1(x)\Big) \ldots f_2'\Big(f_1(x)\Big) f_1'(x) \end{aligned}$$

Käytännössä tapaus $n = 2$ eli lause 3.8 (sivu 7) riittää. Esimerkkinä tarkastellaan funktioita f, g, h ja yhdistettyä funktiota $h \circ g \circ f$ pisteessä x. Tällöin

$$D\Big(h \circ g \circ f\Big)(x) = D\Big(h \circ G\Big)(x),$$



missä $G(x) := g \circ f(x)$. Soveltamalla lausetta 3.8 (sivu 7) kaksi kertaa saadaan derivaataksi

$$h'(G(x)) \cdot G'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Esimerkki Derivoi

$$\cos(e^{x+\sin x}) = \cos(\exp(x + \sin x)).$$

Määritellään

$$\begin{aligned} h(x) &= \cos(x) \\ g(x) &= \exp(x) \\ f(x) &= x + \sin(x). \end{aligned}$$

Silloin

$$\cos(e^{x+\sin x}) = h \circ g \circ f(x).$$

Derivaatta on

$$-\sin(\exp(x+\sin x))\cdot\exp(x+\sin x)\cdot(1+\cos x) = (1+\cos x)e^{x+\sin x}\cdot(-\sin(e^{x+\sin x})).$$

Esimerkki Katso kuva (3.1).

$W(t)$ = auton P sijainti hetkellä t

$W(t_0) = 1\text{km}$, $\frac{dW}{dt}(t_0) = -80$ km/h

$Z(t) =$ auton L sijainti hetkellä t

$Z(t_0) = 1,5\text{km}$

$f(t) =$ autojen P ja L välinen etäisyys hetkellä t.

Oletetaan että

$$\frac{df}{dt}(t_0) = 60\text{km/h}.$$

Mitä on

$$\frac{dZ}{dt}(t_0)?$$

Ratkaisu. Pythagoraan lauseen mukaan

$$f(t)^2 = W(t)^2 + Z(t)^2 \Rightarrow f(t) = \sqrt{W(t)^2 + Z(t)^2}.$$

Derivoidaan reaalimuuttujan t suhteen:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \tfrac{1}{2}\frac{1}{(W(t)^2+Z(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \tfrac{d}{dt}(W(t)^2 + Z(t)^2) \\ &= \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{W(t)^2+Z(t)^2}} \cdot (2W(t)W'(t) + 2Z(t)Z'(t)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{W(t)^2+Z(t)^2}} \cdot (W(t)W'(t) + Z(t)Z'(t)). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$f' \cdot \sqrt{W^2 + Z^2} = W \cdot W' + Z \cdot Z' \iff Z' = \frac{f' \cdot \sqrt{W^2 + Z^2} - W \cdot W'}{Z}.$$

Sijoitetaan tunnetut arvot ajanhetkellä t_0:

$$\frac{dZ}{dt}(t_0) = \frac{60 \cdot \sqrt{1,5^2 + 1^2} + 80 \cdot 1}{1,5}\frac{\text{km}}{\text{h}} \cong 125\text{km/h}.$$

3.2 Käänteisfunktion derivaatta

Lause 3.9 Oletetaan, että funktio f toteuttaa

1° Funktio f on määritelty pisteen x ympäristössä $B(x, r), r > 0$.

2° Funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1}, joka on määritelty pisteen $y := f(x)$ ympäristössä $B(y, s), s > 0$. Oletetaan, että f^{-1} on jatkuva pisteessä y.

3° Funktiolla f on derivaatta $f'(x)$ pisteessä x ja $f'(x) \neq 0$.

Silloin funktiolla f^{-1} on pisteessä y derivaatta, jolle pätee

$$D\Big(f^{-1}\Big)(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Todistus. Sovelletaan Lausetta 3.2 (sivu 3) funktioon f

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h \cdot u(h),$$

missä u on 0:n jossain ympäristössä määritelty kuvaus,

$$\begin{cases} u(0) &= 0 \\ \lim_{h\to 0} u(h) &= 0. \end{cases}$$

Erotusosamäärä f^{-1}:lle pisteessä y on

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k}, \tag{3}$$

Missä k kuuluu johonkin ympäristöön $B(y, s)$; koska f^{-1} on jatkuva pisteessä y, voidaan s valita niin pieneksi, että $f^{-1}(y+k) \in B(x, r)$. Valitaan h siten, että

$$x + h = f^{-1}(y+k).$$

Tällöin

$$f(x+h) - f(x) = f(f^{-1}(y+k)) - y = y + k - y = k,$$

ja (3) saa muodon

$$\begin{aligned} & \frac{x+h-x}{f(x+h)-f(x)} \\ = \; & \frac{h}{f(x+h)-f(x)} = \frac{h}{f'(x)h - h \cdot u(h)} \\ = \; & \frac{h}{f'(x) + u(h)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

kun $h, k \to 0$. $\square$

Lause 3.10 Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Funktio

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

on derivoitava, kun $x > 0$ ja

$$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Todistus. Merkitään

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x > 0.$$

Tällöin f on funktion $g(x) = x^n$ käänteisfunktio ja

$$g'(x) = nx^{n-1}.$$

Lauseesta 3.9 (sivu 10) seuraa, että

$$f'(x) = \frac{1}{g(f'(x))} = \frac{1}{n(f(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{1-1/n}} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}.$$

□

Seuraus Kaikille rationaalisille eksponenteille q pätee

$$Dx^q = \frac{1}{q}x^{q-1}, \quad x > 0.$$

Todistus. Oletetaan, että $q = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ ja $m \in \mathbf{Z}$. Nyt

$$\begin{aligned} Dx^q &= Dx^{\frac{m}{n}} = D(x^{\frac{1}{n}})^m = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot Dx^{\frac{1}{n}} \\ &= m \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = qx^{q-1} \end{aligned}$$

□

Esimerkki Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1.$$

Tämä on aidosti kasvava, kun $x > 2$,

$$f([2, \infty[) = [-1, \infty[\,.$$

Funktiolla $f\Big|_{[2,\infty[}$ on käänteisfunktio

$$g : [-1, \infty[\;\to [2, \infty[\,.$$

Yksinkertaisella laskulla saadaan suoraan

$$g(y) = 2 + \sqrt{y+1} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{2}(y+1)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y+1}}.$$

Käänteisfunktion derivointikaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x-4 = 2(x-2) \\ g'(x) &= \tfrac{1}{f'(g(y))} = \tfrac{1}{2(g(y)-2)} = \tfrac{1}{2\sqrt{y+1}}. \end{aligned}$$

Vastaavasti käsitellään $f\Big|_{]-\infty,2]}$:

$$\begin{aligned} \left(f\Big|_{]-\infty,2]}\right)^{-1}(y) &= 2-\sqrt{y+1} = h(y), \quad y \in [-1,\infty[\\ h'(y) &= \tfrac{-1}{2\sqrt{y+1}}. \end{aligned}$$

Esimerkki Olkoon

$$f(x) = \sqrt{2x-1}, \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Tämä on aidosti kasvava, ja sillä on käänteisfunktio:

$$\begin{aligned} & y &= \sqrt{2x-1} \\ \Longleftrightarrow\ & y^2 &= 2x-1 \\ \Longleftrightarrow\ & x &= \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2} = g(y) \end{aligned}$$

Laske f:n derivaatta

a) yhdistetyn funktion derivointisäännön avulla

b) käänteisfunktion derivointisäännön avulla.

Ratkaisu. a)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

b)

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Määritelmä 3.11 Oletetaan, että f on funktio, joka on määritelty pisteen x ympäristössä. Jos erotusosamäärällä

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on oikean- / vasemmanpuoleinen raja-arvo, siitä sanotaan f:n oikean- / vasemmanpuoleiseksi derivaataksi pisteessä x.

Esimerkki Laske funktion

$$f(x) = \pi|x-3| + 2$$

oikean- ja vasemmanpuoleiset derivaatat pisteessä 3.

Ratkaisu.

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(3+h)f(3)}{h} = \frac{\pi|3+h-3|+2-(\pi|3-3|+2}{h} = \frac{\pi|h|}{h} = \frac{\pi h}{h} = \pi,$$

koska $h > 0$. Vastaavasti

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(3+h)f(3)}{h} = \pi\frac{|h|}{h} = \pi\frac{-h}{h} = -\pi.$$